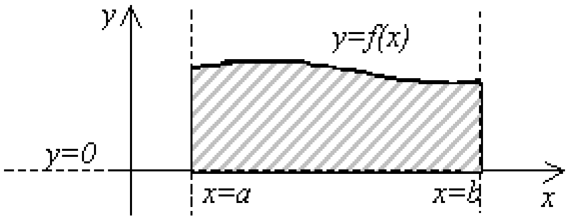
Практическое занятие №34
Вычисление площади криволинейной трапеции
Формула Ньютона—Лейбница

Цель практического занятия: приобрести навыки и умения вычисления площадей фигур.

1. *Краткие сведения из теории*

Если интегрируемая на отрезке $a \le x \le b$ функция *f(x)* неотрицательна, то **определенный интеграл** $\int_a^b f(x)dx$ численно равен **площади *S* криволинейной трапеции** aABb, ограниченной графиком функции *y = f(x)*, осью абсцисс 0x и прямыми *x = a* и *x = b*, т.е.

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$



- Если функция $y = f(x) \ge 0$ на отрезке $[a, b]$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x) \ge 0$**,** осью 0x и прямыми $x = a,\ x = b$ равна

$$S = \int_a^b f(x)dx \quad (1)$$

- Если функция $f(x) \le 0$ на $[a, b]$, то площадь вычисляется по формуле (1) от абсолютной величины подынтегральной функции

$$S = \int_a^b |f(x)|dx \qquad \text{или} \qquad S = -\int_a^b f(x)dx$$

- Если надо вычислить площадь фигуры, ограниченной двумя кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, при условии, что $f_2(x) \ge f_1(x)$, то искомую площадь найдем как разность площадей двух криволинейных трапеций

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx \quad (2)$$

Для нахождения пределов интегрирования надо найти абсциссы точек A и B пересечения кривых, решив уравнение $f_1(x) = f_2(x)$.

2. *Решение типовых примеров:*

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x + 2,\ \ y = 2x - \frac{x^2}{2} + 6$

Решение.

Находим точки пересечения заданных линий. Для этого решаем систему уравнений:

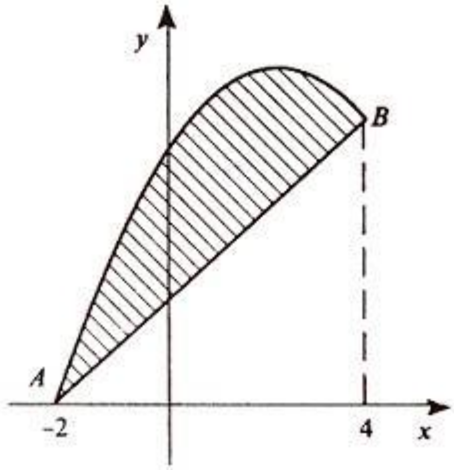
$$\begin{cases} y = x + 2, \\ y = 2x - \dfrac{x^2}{2} + 6. \end{cases}$$

Для нахождения абсцисс точек пересечения заданных линий решаем уравнение:

$$x + 2 = 2x - \frac{x^2}{2} + 6 \quad \text{или} \quad x^2 - 2x - 8 = 0.$$

Находим: $x_1 = -2$, $x_2 = 4$.

Итак, данные линии, представляющие собой параболу и прямую, пересекаются в точках $A(-2; 0)$, $B(4; 6)$.



Эти линии образуют замкнутую фигуру, площадь которой вычисляем по указанной выше формуле:

$$S = \int_{-2}^{4}\left(2x - \frac{x^2}{2} + 6 - x - 2\right)dx = \int_{-2}^{4}\left(x - \frac{x^2}{2} + 4\right)dx.$$

По формуле Ньютона-Лейбница находим:

$$S = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + 4x\right)\Bigg|_{-2}^{4} = \frac{16}{2} - \frac{64}{6} + 16 - \frac{4}{2} - \frac{8}{6} + 8 = 18.$$

Ответ: $S = 18 ед.^2$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $y = -x^2 + 4x; y = 0$.

Решение.

Находим точки пересечения заданных линий. Для этого решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x \\ y = 0 \end{cases}$$

Для нахождения абсцисс точек пересечения заданных линий решаем уравнение:

$-x^2 + 4x = 0$

Находим: $x_1 = 0,\ x_2 = 4$

Искомую площадь криволинейной трапеции найдем по формуле:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

$$S = \int_0^4 (-x^2 + 4x)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^4 = \frac{32}{3}$$

Ответ: $S = \frac{32}{3} ед.^2$

Пример 3. Вычислить площадь, ограниченную линиями

$y = x^2 + 1, y = 0, x = 0, x = 2$.

Решение.

Искомую площадь криволинейной трапеции найдем по формуле:

$$S = \int_0^2 (x^2 + 1)dx = (\frac{x^3}{3} + x)\Big|_0^2 = \frac{8}{3} + 2 - 0 = 4\frac{2}{3}$$

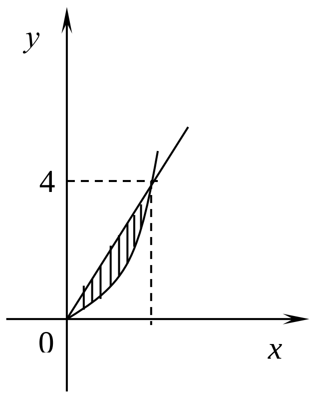
Ответ: $S = 4\frac{2}{3} ед.^2$

Пример 4.Вычислить площадь, ограниченную линиями $y = x^2$ и $y = 2x$.

Решение.

Решая систему уравнений $y = x^2$ и $y = 2x$, найдем координаты точек пересечения параболы и прямой: $x_1 = 0, x_2 = 2, y_1 = 0, y_2 = 4$.

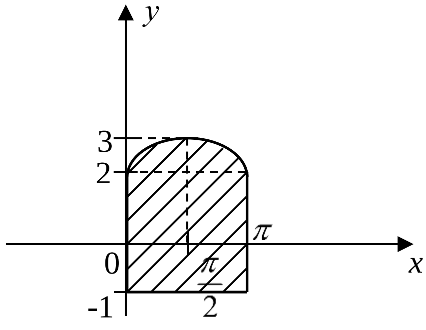
Искомая площадь равна разности площадей двух криволинейных трапеций:



$$S = \int_0^2 2xdx - \int_0^2 x^2dx = \int_0^2 (2x - x^2)dx = (2 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3})\Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} - 0 = \frac{4}{3}$$

Ответ: $S = \frac{4}{3} ед.^2$

Пример 4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = \sin + 2$, $y = -1$, $x = 0$, $x = \pi$

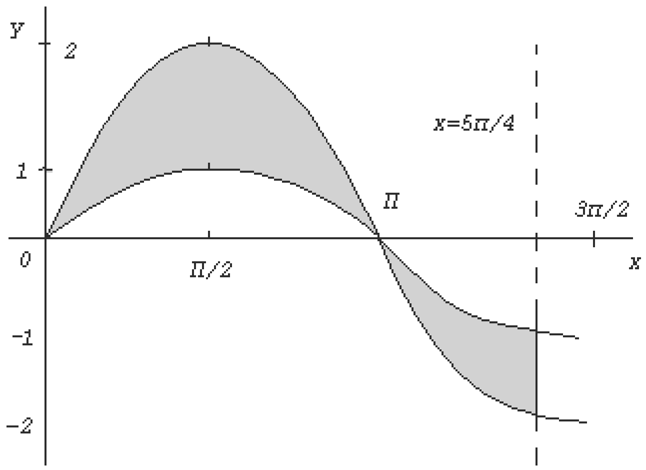


$$S=\int_0^{\pi}(\sin x+2+1)dx=(-\cos x+3x)\Bigg|_{0}^{\pi}=-\cos\pi+3\pi+1=(3\pi+2)$$

Ответ: $S=(3\pi+2)ед.^2$

Пример 5.Найти площадь фигуры, ограниченной линиями <u>*y=sinx*</u>, *y=2sinx*, *x=0*, $x=\dfrac{5\pi}{4}$

Решение: Построим графики функций *y=sinx*, *y=2sinx*



$$S=\int_0^{\pi}(2\sin x-\sin x)dx=(-\cos x)\Bigg|_{0}^{\pi}=2$$

Ответ: $S=2\ \ ед.^2$

Пример 6..

Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=-x^2-2x+3$, осями координат и прямой $x=2$.

В рассматриваемом случае функция $f(x)=-x^2-2x+3$ на отрезке $[0;\,2]$ меняет знак, а именно $f(x)\ge 0$ на отрезке $[0;\,1]$ и $f(x)\le 0$ на отрезке $[1;\,2]$.

Для нахождения искомой площади воспользуемся формулой (3):

$$S=\int_0^2\left|-x^2-2x+3\right|dx=\int_0^1\left|-x^2-2x+3\right|dx+\int_1^2\left|-x^2-2x+3\right|dx=$$

$$=\int_0^1(-x^2-2x+3)dx-\int_1^2(-x^2-2x+3)dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right]_0^1-\left[-\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right]_1^2=\frac{5}{3}-\left(-\frac{7}{3}\right)=4\ (\text{кв. ед.}).$$

Ответ: $S=4\ \ ед.^2$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).}$$ **формула Ньютона-Лейбница**

1. **<u>Вычислите определенные интегралы по формуле Ньютона-Лейбница</u>**(формула Н-Л см. информация 🡅).

   1) $\int_1^2 5x^2 dx.$

   Решение: Используя методы непосредственного интегрирования и формулу Ньютона-Лейбница, имеем:

$$\int_1^2 5x^2 dx = 5\int_1^2 x^2 dx = 5\frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{40}{3} - \frac{5}{3} = \frac{35}{3}.$$

Повторить теоретические сведения, разобрать приведенные примеры, записать их в тетрадь, вычислить следующие интегралы:

1) $\int_1^2 x^3 dx;$

2) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x^3};$

3) $\int_0^4 \sqrt{x}dx;$