Тема урока: Подобие тел. Отношения площадей поверхностей и объемов подобных тел

Два многогранника называются подобными, если они имеют соответственно равные многогранные углы и соответственно подобные грани.

Соответственные элементы подобных многогранников называются ***сходственными***. У подобных многогранников двугранные углы равны и одинаково расположены; сходственные рёбра пропорциональны.

Если в пирамиде проведём секущую площадь параллельно основанию, то она отсечёт от неё другую пирамиду, подобную данной.

Поверхности подобных многогранников относятся, как квадраты сходственных линейных элементов многогранников.

Объёмы подобных многогранников относятся как кубы сходственных линейных элементов этих многогранников.

Квадраты объёмов подобных многогранников относятся как кубы площадей сходственных граней.

Подобные цилиндры и конусы.

Два цилиндра, конуса или усечённых конуса называются подобными, если подобны их осевые сечения.

Боковые и полные поверхности подобных цилиндров, конусов и усечённых конусов относятся, как квадраты их сходственных линейных элементов. (радиусов оснований, высот, образующих).

Объёмы подобных тел.

Пусть T и T' – два простых подобных тела. Это означает, что существует преобразования подобия, при котором тело T переходить в тело T'. Обозначим через k коэффициент подобия.
Разобьём тело T на треугольные пирамиды

$P_1, P_2, \ldots, P_n \ldots$

Преобразования подобия, которое переводит тело T в тело T' переводит пирамиды

$P_1, P_2, \ldots, P_n$ в пирамиды $P_1', P_2', \ldots, P_n'$.

Эти пирамиды составляют тело T' и поэтому объём тела T' равен сумме объёмов пирамид

$P_1', P_2', \ldots, P_n'$.

Так как пирамиды P_1' и P_1 подобны и коэффициент подобия равен k, то и отношение их высот равно k, а отношение площадей их оснований равно k^2. Поэтому, отношение

объёмов пирамид равно k^3. Так как тело T состоит из пирамид P_1, а тело T' состоит из пирамид P_1', то отношение объёмов тел T' и T тоже равно k^3.
Число k – коэффициент подобия – равен отношению расстояний между любыми двумя соответствующими парами точек при преобразования подобия. Поэтому, это число равно отношению любых двух соответствующих линейных размеров тел T' и T. Таким образом, мы приходим к следующему выводу:

Объёмы двух подобных тел относятся как кубы их соответствующих линейных размеров.

Квадраты объёмов подобных тел относятся, как кубы площадей соответствующих граней.

Объёмы подобных цилиндров, конусов и усечённых конусов относятся, как кубы их соответствующих линейных элементов (радиусов оснований, высот, образующих).

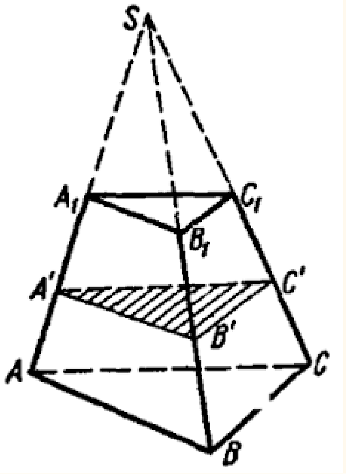
Объёмы шаров относятся, как кубы их радиусов или диаметров.

ЗАДАЧА:

Площади оснований усечённой пирамиды S_1 и S_2, а её объём равен V. Определить объём полной пирамиды.

РЕШЕНИЕ:

Пусть $S_1 > S_2$. Обозначим объём полной пирамиды через V_1, а объём пирамиды, дополняющей данную усечённую пирамиду до полной, через V_2



Тогда:

$$\frac{V_2^2}{V_1^2} = \frac{S_2^3}{S_1^3},$$

или

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{S_2^{\frac{3}{2}}}{S_1^{\frac{3}{2}}}.$$

Составляя производную пропорцию, получим:

$$\frac{V_1 - V_2}{V_1} = \frac{S_1^{\frac{3}{2}} - S_2^{\frac{3}{2}}}{S_1^{\frac{3}{2}}}.$$

С учётом $V_1 - V_2 = V$, *находим*:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{S_1^{\frac{3}{2}} - S_2^{\frac{3}{2}}}{S_1^{\frac{3}{2}}},$$

откуда:

$$V_1 = \frac{VS_1^{\frac{3}{2}}}{S_1^{\frac{3}{2}} - S_2^{\frac{3}{2}}}.$$

ОТВЕТ:

$$V_1 = \frac{V\sqrt{S_1^3}}{\sqrt{S_1^3} - \sqrt{S_2^3}} \text{ (куб. од.).}$$

ЗАДАЧА:

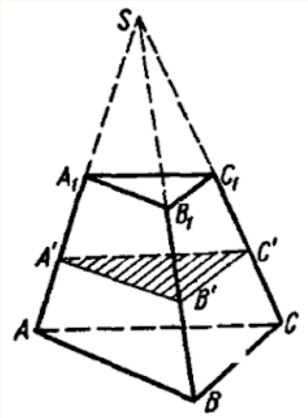
Площади оснований усечённой пирамиды равны a^2 *и* b^2. *Найти площадь сечения, которое параллельно площадям оснований усечённой пирамиды и делящего её объём пополам.*

РЕШЕНИЕ:

В усечённой пирамиде AC_1 (*для простоты рисунка рассматривается треугольная пирамида*) *дано*:

$$S_{ABC} = a^2,$$

$$S_{A_1B_1C_1} = b^2.$$



Необходимо найти площадь сечения $A'B'C'$ (*пл.* $ABC \parallel$ *пл.* $A'B'C'$), *которое делит усечённую пирамиду на равновеликие по объёму части.*
Дополним усечённую пирамиду до полной. Пирамиды

$SABC$, $SA'B'C'$, $SA_1B_1C_1$ –

подобные.
Обозначим площадь искомого сечения $A'B'C'$ через x^2, а объёмы пирамид

$SABC$, $SA'B'C'$ *и* $SA_1B_1C_1$

соответственно V_a, V_x, V_b. *Тогда*:

$$\frac{V_a^2}{a^6} = \frac{V_x^2}{x^6} = \frac{V_b^2}{b^6},$$

или

$$\frac{V_a}{a^3} = \frac{V_x}{x^3} = \frac{V_b}{b^3} = t,$$

где t – *некоторое число, которое обозначает величину этих отношений. Тогда*:

$V_a = a^3t$, $V_x = x^3t$, $V_b = b^3t$.

По условию задачи:

$V_a - V_x = V_x - V_b$,

или

$a^3t - x^3t = x^3t - b^3t$,

откуда:

$2x^3 = a^3 + b^3$.

поэтому,

$$x^2 = \left(\frac{a^3+b^3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

ОТВЕТ:

$$S_{A'B'C'} = \sqrt[3]{\left(\frac{a^3+b^3}{2}\right)^2} \text{ (кв. од.).}$$

Домашнее задание:

1. **Составить конспект урока**
2. **Решить задачу: Высота конуса равна *5 см*. На расстоянии *2 см* от вершины его пересекает плоскость, параллельная основанию. Найдите объём исходного конуса, если объём меньшего конуса, отсекаемого от исходного, равен *24 см*^{3}.**