Иррациональные уравнения. Методы решения иррациональных уравнений. Решение иррациональных уравнений.

Иррациональными уравнениями называются уравнения, содержащие переменную под знаком радикала (корня) или под знаком возведения в дробную степень. При этом, степень корня может быть произвольной.

Например, $2 \cdot \sqrt{x-1} = 8 + x$; $x\sqrt[3]{x+5} = 0$; $(2x-3)^{\frac{3}{4}} = 1$.

Из определения следует, что если в записи уравнения нет знака корня (или дробного показателя степени), то уравнение не является иррациональным. Однако, не все уравнения, содержащие знаки корней, являются иррациональными. Действительно, в иррациональном уравнении под знаком корня должна быть переменная, и если её там нет, то уравнение не является иррациональным.

Например, $x^2 \cdot \sqrt[3]{2-\sqrt{2}} = \sqrt{5}$; $\frac{x+1}{\sqrt{2}} = -2x^2 + 4$. В этих уравнениях под знаком корня стоят числа, а не переменные, значит, они не являются иррациональными.

Перечислим **основные методы решения иррациональных уравнений.**

1) **По определению корня.**
2) **Метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень.**
3) **Метод введения новой переменной.**
4) **Метод разложения на множители.**
5) **Функционально-графический метод.**
6) **Решение иррациональных уравнений через ОДЗ.**
7) **Решение иррациональных уравнений вида «дробь равна нулю».**
8) **Приведение иррациональных уравнений к числовым равенствам.**
9) **Переход к модулям.**
10) **Преобразование иррациональных уравнений.**

Рассмотрим некоторые из перечисленных методов.

1) **С помощью определения корня** обычно решаются простейшие иррациональные уравнения, т.е. уравнения вида $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые рациональные выражения. Решение таких уравнений зависит от чётности показателя корня.
Рассмотрим сначала случай, когда в правой части содержится число, т.е.
$$\sqrt[n]{f(x)} = C.$$

- Если n – чётное, т.е. $n = 2k$, где $k = 1, 2, 3, \dots$, то

$$\sqrt[2k]{f(x)} = C \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x) = C^{2k}, & \text{если } C \geq 0; \\ \text{корней нет}, & \text{если } C < 0. \end{array}\right.$$

- Если n – нечётное, т.е. $n = 2k + 1$, где $k = 1, 2, 3, \dots$, то

$$\sqrt[2k+1]{f(x)} = C \Leftrightarrow f(x) = C^{2k+1}, \ \ \forall C$$

Теперь рассмотрим случай, когда в правой части стоит выражение, зависящее от x, т.е.
$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$$

- Если n – чётное, т.е. $n = 2k$, где $k = 1, 2, 3, \dots$, то

$$\sqrt[2k]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^{2k}(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

- Если n – нечётное, т.е. $n = 2k + 1$, где $k = 1, 2, 3, \dots$, то

$$\sqrt[2k+1]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g^{2k+1}(x)$$

Например,

а) $\sqrt{x^2 - 5} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 5 = 2^2 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 3, \\ x_2 = -3. \end{array}\right.$

б) $\sqrt[4]{x + 2} = -1 - \text{корней нет, т.к.} \ -1 < 0.$

в) $\sqrt[3]{2x - 1} = -3 \Leftrightarrow 2x - 1 = (-3)^3 \Leftrightarrow 2x = -26 \Leftrightarrow x = -13.$

г) $\sqrt{2x^2 - 3x - 5} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 5 = (x - 1)^2, \\ x - 1 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 = 0, \\ x \geq 1; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = -2, \\ x_2 = 3; \end{array}\right. \\ x \geq 1; \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$

д) $\sqrt[3]{x^3 + 4x^2 + 3x - 3} = x + 1 \Leftrightarrow x^3 + 4x^2 + 3x - 3 = (x + 1)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3 + 4x^2 + 3x - 3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2, \\ x_2 = -2. \end{array}\right.$

2) В основе **метода возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень** лежит следующее утверждение:
Возведение обеих частей уравнения в одну и ту же чётную натуральную степень даёт уравнение-следствие, а возведение обеих частей уравнения в одну и ту же нечётную степень даёт равносильное уравнение.
Поэтому, при возведении в чётную степень, необходимо находить область допустимых значений, либо выполнять проверку для найденных корней.
Этот метод обычно используется при решении уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$.

- Если n – чётное, т.е. $n = 2k$, где $k = 1, 2, 3, \dots$, то

$$\sqrt[2k]{f(x)} = \sqrt[2k]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Для упрощения записи решения уравнения, неравенства можно вынести в ОДЗ. Это будет выглядеть так:

$\sqrt[2k]{f(x)} = \sqrt[2k]{g(x)}$ ОДЗ: $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

$f(x) = g(x)$

- Если n – нечётное, т.е. $n = 2k + 1$, где $k = 1, 2, 3, \dots$, то

$$\sqrt[2k+1]{f(x)} = \sqrt[2k+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

Например,

а) $\sqrt{x^2-4}=\sqrt{5x-1\frac{1}{4}}$ ОДЗ: $\begin{cases} x^2-4\geq 0, \\ 5x-1\frac{1}{4}\geq 0; \end{cases}$

$x^2-4=5x-1\frac{1}{4}$ $\begin{cases} (x-2)(x+2)\geq 0, \\ x\geq \frac{1}{4}; \end{cases}$

$x^2-5x-2\frac{3}{4}=0$ $\begin{cases} x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty), \\ x\in\left[\frac{1}{4};+\infty\right); \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} x_1=5{,}5, \\ x_2=-0{,}5. \end{array}\right.$ $x\in(2;+\infty)$

$x_2=-0{,}5\notin$ ОДЗ, значит, этот корень посторонний.

Ответ: 5,5

б) $\sqrt[3]{2x-1}=\sqrt[3]{x}$

$2x-1=x$

$x=1$

Ответ: 1

в) $\frac{x+6}{\sqrt{x-2}}-6=0$ ОДЗ: $x-2>0$

$x+6=6\sqrt{x-2}$ $x>2$

$x^2+12x+36=36(x-2)$ $x\in(2;+\infty)$

$x^2-24x+108=0$

$\left[\begin{array}{l} x_1=18, \\ x_2=6. \end{array}\right.$

Оба корня принадлежат области допустимых значений, значит, они являются корнями исходного уравнения.

Ответ: 6; 18.

г) $\sqrt{2x+1}-\sqrt[3]{x+1}=0$ ОДЗ: $2x+1\geq 0$

$\sqrt{2x+1}=\sqrt[3]{x+1}$ $x\geq -0{,}5$

$\left(\sqrt{2x+1}\right)^6=\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^6$ $x\in[-0{,}5;+\infty)$

$(2x+1)^3=(x+1)^2$

$8x^3+12x^2+6x+1=x^2+2x+1$

$8x^3+11x^2+4x=0$

$x(8x^2+11x+4)=0$

$x=0$ или $8x^2+11x+4=0$

$D=121-4\cdot 8\cdot 4=121-128=-7<0$, значит, уравнение не имеет действительных корней.

$x=0$ принадлежит области допустимых значений, значит, этот корень является корнем исходного уравнения.

Ответ: 0.

д) $\sqrt{x+4}+\sqrt{6-x}=\sqrt{2x+6}$ ОДЗ: $\begin{cases} x+4\geq 0, \\ 6-x\geq 0, \\ 2x+6\geq 0; \end{cases}$

$\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{6-x}\right)^2=\left(\sqrt{2x+6}\right)^2$ $\begin{cases} x\geq -4, \\ x\leq 6, \\ x\geq -3; \end{cases}$

$\left(\sqrt{x+4}\right)^2+2\cdot\sqrt{(x+4)(6-x)}+\left(\sqrt{6-x}\right)^2=2x+6$ $x\in[-3;6]$

$$x+4+2\sqrt{-x^2+2x+24}+6-x=2x+6$$
$$2\sqrt{-x^2+2x+24}=2x-4$$
$$\sqrt{-x^2+2x+24}=x-2$$

Теперь к области допустимых значений добавляется ещё одно условие: $x-2\geq 0$.

$$\left(\sqrt{-x^2+2x+24}\right)^2=(x-2)^2$$
$$-x^2+2x+24=x^2-4x+4$$
$$2x^2-6x-20=0$$
$$x^2-3x-10=0$$
$$\left[\begin{array}{l} x_1=-2, \\ x_2=5. \end{array}\right.$$

ОДЗ: $\begin{cases} x-2\geq 0, \\ x\in[-3;6]; \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq 2, \\ x\in[-3;6]; \end{cases}$ $x\in[2;6]$

$x_1=-2$ не принадлежат области допустимых значений, значит, этот корень посторонний.
Ответ: 5.

3) Удобным методом решения иррациональных уравнений является **метод введения новой переменной**. Метод, обычно, применяется в случае, если в уравнении неоднократно встречается некоторое выражение с переменной. Тогда имеет смысл обозначить это выражение другой переменной.

Более сложным является случай, когда в уравнении присутствуют корни разных степеней. В этом случае есть смысл обозначить каждый корень другой переменной. Это можно выразить формулой:

$$\sqrt[n]{f(x)}\pm\sqrt[m]{g(x)}=C \Leftrightarrow \begin{cases} u=\sqrt[n]{f(x)}, \text{ причём, } & \text{если } n-\text{чётное, то } u\geq 0, \\ v=\sqrt[m]{g(x)}, \text{ причём, } & \text{если } m-\text{чётное, то } v\geq 0, \\ u\pm v=C, \\ u^n\mp v^m=f(x)\mp g(x) \end{cases}$$

Например,

а) $\sqrt[3]{x^2}-4\sqrt[3]{x}+3=0$

Так как в уравнении присутствует корень нечётной степени, то находить ОДЗ не имеет смысла.

Введём новую переменную: $t=\sqrt[3]{x}$, тогда $\sqrt[3]{x^2}=t^2$. Значит, исходное уравнение принимает вид:

$$t^2-4t+3=0$$
$$\left[\begin{array}{l} t_1=1, \\ t_2=3 \end{array}\right.$$

Возвращаемся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{x}=1, \\ \sqrt[3]{x}=3; \end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=27. \end{array}\right.$$

Ответ: 1; 27

б) $\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{x+7}=4$ ОДЗ: $x+3\geq 0$, $x\geq -3$

Введём новые переменные:

$u=\sqrt{x+3}$, $v=\sqrt[3]{x+7}$, причём $u\geq 0$.

Тогда исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} u+v=4, \\ v^3-u^2=4 \end{cases}$$
$$\begin{cases} u=4-v, \\ v^3-(4-v)^2=4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 4 - v, \\ v^3 - v^2 + 8v - 20 = 0, \end{cases}$$

Решим кубическое уравнение методом разложения на множители:

$v^3 - 2v^2 + v^2 - 2v + 10v - 20 = 0$

$v^2(v-2) + v(v-2) + 10(v-20) = 0$

$(v-2)(v^2 + v + 10) = 0$

$v - 2 = 0$ или $v^2 + v + 10 = 0$

$v = 2$ $D = 1 - 40 = -39 < 0 \Rightarrow$ корней нет.

$$\begin{cases} v = 2 \\ u = 2 \end{cases}$$

Возвращаемся к исходной переменной. Для этого достаточно использовать только одну из двух замен.

$\sqrt{x+3} = 2$

$x + 3 = 4$

$x = 1 \in$ ОДЗ.

Ответ: 1.

4) **Метод разложения на множители** используется тогда, когда достаточно просто найти общие множители в записи уравнения. Общий множитель выносится за скобки и используется свойство равенства нулю произведения.

$$f(x) \cdot \sqrt[n]{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \geq 0 \text{ (если корень чётной степени)} \end{cases} \\ \sqrt[n]{g(x)} = 0. \end{array}\right.$$

Например, а) $2\sqrt{(x-1)(x-2)} - (x-1) = 0$

ОДЗ: $(x-1)(x-2) \geq 0$

$x \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$

Вынесем за скобки $\sqrt{x-1}$:

$$\sqrt{x-1} \cdot \left(2\sqrt{x-2} - \sqrt{x-1}\right) = 0$$

$\sqrt{x-1} = 0$ или $2\sqrt{x-2} - \sqrt{x-1} = 0$

$x - 1 = 0$ $2\sqrt{x-2} = \sqrt{x-1}$

$x = 1$ $4x - 8 = x - 1$

$3x = 7$

$x = 2\frac{1}{3}$

Оба корня принадлежат области допустимых значений.

Ответ: $1;\ 2\frac{1}{3}$

б) $\sqrt{2x^2 + 8x + 6} + \sqrt{x^2 - 1} = 2x + 2$

$$\sqrt{2(x+1)(x+3)} + \sqrt{(x-1)(x+1)} - 2\left(\sqrt{x+1}\right)^2 = 0$$

$$\sqrt{x+1} \cdot \left(\sqrt{2x+6} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x+1}\right) = 0$$

$\sqrt{2x+6} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x+1} = 0$ или $\sqrt{x+1} = 0$

$\sqrt{2x+6} + \sqrt{x-1} = 2\sqrt{x+1}$ $x + 1 = 0$

$\left(\sqrt{2x+6}+\sqrt{x-1}\right)^2=\left(2\sqrt{x+1}\right)^2$ $\qquad\qquad x=-1$

ОДЗ: $\begin{cases}2x+6\geq 0,\\ x-1\geq 0,\\ x+1\geq 0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -3,\\ x\geq 1,\\ x\geq -1,\end{cases}\Leftrightarrow x\in[1;+\infty)$

$$2x+6+2\sqrt{(2x+6)(x-1)}+x-1=4(x+1)$$

$$2\sqrt{(2x+6)(x-1)}-(x-1)=0$$

$$\sqrt{x-1}\cdot\left(2\sqrt{2x+6}-1\right)=0$$

$2\sqrt{2x+6}-1=0$ или $\sqrt{x-1}=0$

$\sqrt{2x+6}=0{,}5$ $\qquad x-1=0$

$2x+6=0{,}25$ $\qquad x=1$

$x=-2{,}875\notin$ ОДЗ

Ответ: ± 1

Записать краткий конспект урока, решить следующие уравнения:

1. Решить уравнения:

1) $\sqrt{1-x}=3$; 2) $\sqrt{x-2}=4$; 3) $\sqrt[3]{19-x^3}=3$; 4) $\sqrt{x}=2$;

5) $\sqrt{x-1}=2$; 6) $\sqrt{x+2}=0$; 7) $\sqrt{7-x}=0$; 8) $\sqrt{-5-x}=0$;

2. Решить простейшие и, сводящиеся к простейшим, уравнения:

1) $1-\sqrt{1+5x}=x$; 2) $\sqrt{-x-9}=x+9$; 3) $\sqrt{x+3}=2x+5$;

4) $\sqrt{x-2}=4-x$; 5) $\sqrt{x-1}=3-x$; 6) $\sqrt{2x-4}=6-x$;

3. Решить уравнения:

1) $\sqrt{3x-5}=\sqrt{9-7x}$; 2) $\sqrt{6x^2-3}=\sqrt{5x-2}$; 3) $\sqrt{3x^2-5x}=\sqrt{x^2+2x-5}$;

4) $\sqrt{x^5-x+1}=\sqrt{1-2x^5}$; 5) $\sqrt{x^7-x+1}=\sqrt{1-2x^7}$; 6) $\sqrt{x+3}=\sqrt{5-x}$;