Основные понятия об уравнениях, неравенствах и их системах.

Один из основных вопросов, который "занимает" математиков - решение различных рода и типа уравнений или неравенств, систем уравнений (неравенств) или, как говорят математики, исследование уравнений на их *разрешимость*. Это *выражение* включает множество смежных аспектов - *вывод* уравнения (неравенства), нахождение решения, выяснение его однозначности, единственности и т.д. Нас будут интересовать два основных вопроса (как "нематематика") - *вывод* уравнения (неравенства) и нахождение его решения (хотя другие вопросы иногда могут оказаться не менее значимыми, интересными и сложными).

Уравнением называется некоторое определенное равенство, связывающее хотя бы один неизвестный объект (из некоторого, заранее определенного множества объектов) хотя бы с одним известным объектом из этого (чаще всего) или из другого множества.Если эти объекты - числового происхождения, то уравнение называется числовым (скалярным). Если объекты - векторы, то уравнение называется векторным. Если объекты - матрицы, то уравнение называется матричным и т.д.

Решением уравнения называется любое конкретное значение неизвестного объекта, которое при подстановке в уравнение превращает его в верное (истинное) равенство, то есть в *тождество*. Если такой допустимый *объект* не существует, то уравнение не имеет решения или неразрешимо в данном множестве объектов. Множество допустимых значений неизвестного объекта называется *допустимым множеством решений* или *областью определения уравнения* .

Количество известных и неизвестных объектов уравнения существенно влияет на *разрешимость* уравнения.

Пример. Уравнение $2x+3=7$ - простое скалярное уравнение, относительно неизвестного числа x. Уравнение $2x+3y=z$ - также скалярное, но уже относительно трех неизвестных. Это уравнение - несравнимо более сложное и в общем виде не имеющее решения (то есть не имеющее метода, алгоритма поиска неизвестных x, y, z).

Если решается уравнение вида $f(x)=0$ и найдено его решение $x=a$ (иначе говоря, $f(a)=0$), то $x=a$ называют *нулем* функции $f(x)$.

Неравенство - некоторое соотношение, связывающее неизвестный *объект* (неизвестные объекты) с известными объектами с помощью знаков неравенства (знаков $\neq$, $\geq$, $\leq$, $<$, $>$).

Неравенства, как и уравнения, могут быть различного типа: скалярные, *векторные* и т.д.

Решение системы уравнений (неравенств) должно обращать в *тождество* каждое уравнение (*неравенство*) системы. Для решения системы уравнений (неравенств) необходимо решить каждое уравнение (*неравенство*), найти *множества* решений каждого уравнения (неравенства) и взять их *пересечение* (то есть *подмножество*, где каждое уравнение или *неравенство* обращается в верное числовое *равенство* или *неравенство*).

Решить уравнение (*неравенство*) означает найти все допустимые объекты, превращающие уравнение (неравенство) в истинное равенство (неравенство). Решением уравнения (неравенства) называют часто также и сам процесс нахождения таких объектов.

Пример. Получим (как говорят математики, "выведем") и затем решим скалярное уравнение (уравнение с числовым неизвестным) *по* следующим исходным данным (*по* следующей содержательной постановке задачи): *расстояние* между станциями А и В *по* железной дороге равно 96 км, при этом первый поезд, идущий со средней скоростью на 12 км/час больше, чем второй, проходит это *расстояние* на 40 мин. быстрее, чем второй; необходимо найти скорости обоих поездов. Для получения уравнения проанализируем условие задачи и выпишем содержательно *связь* между параметрами (элементами) задачи, то есть выпишем содержательное уравнение вида (Время на АВ второго поезда) - (Время на АВ первого поезда) = 40 мин.

Теперь видно, что для нахождения неизвестных объектов (времени) этого уравнения необходимо ввести неизвестное - скорость (так как *путь* известен). Итак, обозначим через x (км/час) - скорость первого поезда, тогда скорость второго поезда будет *по* условию задачи равна x-12 (км/час). Из содержательно и не формализованно записанного соотношения, получаем уже формализованное, алгебраическое уравнение вида

$$\frac{96}{x-12} - \frac{96}{x} = \frac{40}{60}.$$

Решаем это уравнение. Для этого приводим к общему знаменателю:

$$288x - 288(x-12) = 2x(x-12) \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 12x - 1728 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{1,2} = 6 \pm 42$$

.

Отбрасывая затем один из неподходящих двух корней (x=-36), получаем скорость первого поезда - 48 км/час, а скорость второго поезда (находим *по* условию задачи) - 36 км/час.

Особый *класс* уравнений и неравенств образуют уравнения и неравенства, связывающие текущие *координаты* точки на *прямой*, плоскости, пространстве и описывающие геометрические свойства, геометрическую (топологическую) структуру *множества* точек, удовлетворяющих такому соотношению, то есть решений таких уравнений или неравенств. Такие уравнения часто называют уравнениями линий, поверхностей (фигур, тел).

Рассмотрим некоторые основные, простые (канонические, как говорят в математике) типы таких уравнений и неравенств. Отметим попутно, что уравнения, определяющие линии на плоскости, часто в каноническом виде представлять не удается.

Окружность - это геометрическое место точек плоскости, отстоящих от некоторой фиксированной точки $M(x_0; y_0)$ (называемой центром окружности) на одинаковом расстоянии r (называемой радиусом окружности). Задается неявным уравнением $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$.

Пример. Уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом, равным 3 единицы масштаба координатной системы, можно изобразить как на рис. 6.1.

Эллипс - это геометрическое *место* (рис. 6.2) точек $M(x;y)$, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Выведем уравнение эллипса. Пусть, согласно определению эллипса, $r_1+r_2=|F_2M|+|F_1M|=2a$.

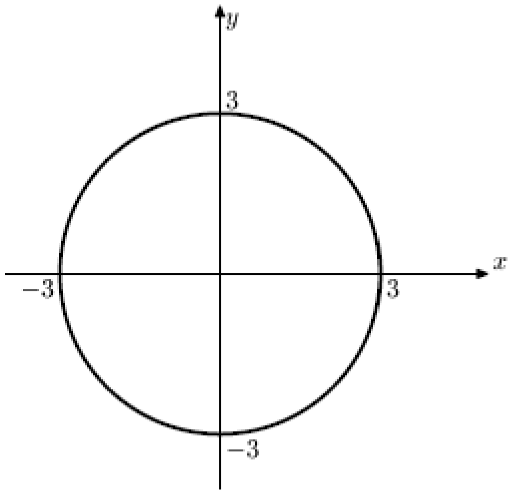

Рис. 6.1. График окружности

Легко проверить (*по* известной из школы формуле расстояния между двумя точками), что верны следующие равенства:

$$r_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$
$$r_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Поэтому из равенства $r_1+r_2=2a$ получаем:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a,$$

или $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$, а так как $a>c$ (или $2a>2c$ в треугольнике MF_2F_1), то $a^2-c^2>0$. Обозначим $b^2=a^2-c^2$, тогда получим $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, или соотношение вида:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Это уравнение называется каноническим уравнением эллипса, величины r_1 и r_2 - фокальные радиусы точки $M(x;y)$, F_1, F_2 - фокусы эллипса, $x=0$, $y=0$ - оси *симметрии*, величина $2a$ - большая ось, $2b$ - малая ось, $2c=|F_1F_2|$ - фокусное *расстояние*, величина $E=\frac{c}{a}<1$ - *эксцентриситет* эллипса.

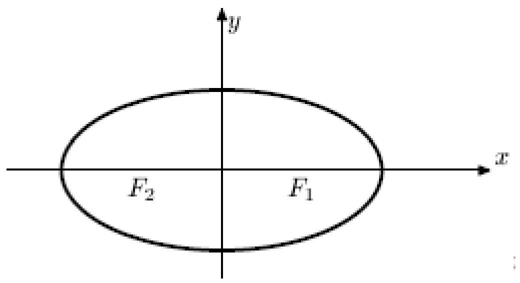

Рис. 6.2. График эллипса

Записать краткий конспект урока, отправить на электронную почту преподавателя.