Тема: Степенная функция. Свойства функций и её график

Определение. Функция вида $y=x^n$, где n- любое действительное число, называют степенной функцией.

С некоторыми из таких функций вы уже познакомились в курсе алгебры 7-9 классов Это, например, функции $y=x^1=x$, $y=x^2$, $y=x^3$. При произвольном натуральном n графики и свойства функции $y=x^n$ аналогичны известным графикам и свойствам указанных функций.

Если показатель степени n — натуральное число, то степенная функция задаётся формулой $y=x^n$.

При n=1, $y=x^1$ или $y=x$ — прямая (Рисунок 1).

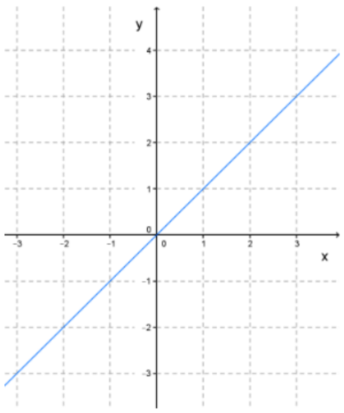

Рисунок 1 – график функции $y=x^1$

При n=2, $y=x^2$ — парабола.

При n=3, $y=x^3$ — кубическая парабола.

График степенной функции $y=x^n$, где n — чётное число (4,6,8...), принимает вид параболы.

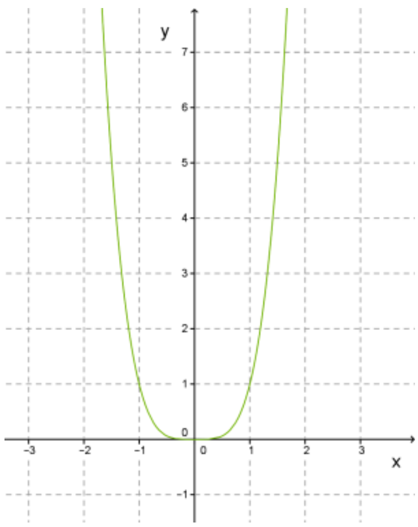

Рисунок 2 – график функции $y=x^n$, где n — чётное число

График степенной функции $y=x^n$, где n — нечётное число (5,7,9...), принимает вид кубической параболы.

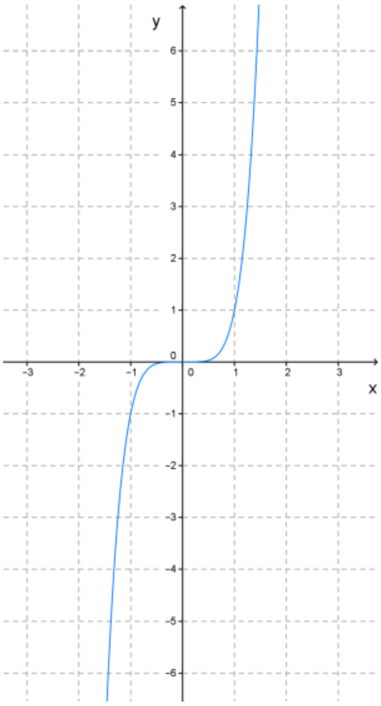

Рисунок 3 – график функции $y=x^n$, где n — нечётное число

Если показатель степени — целое отрицательное число, то степенная функция задаётся формулой $y=x^{-n}$ или $y=1/x^n$.

График степенной функции $y=x^{-n}$, в случае, когда n — **чётное число** (4,6,8...), принимает вид:

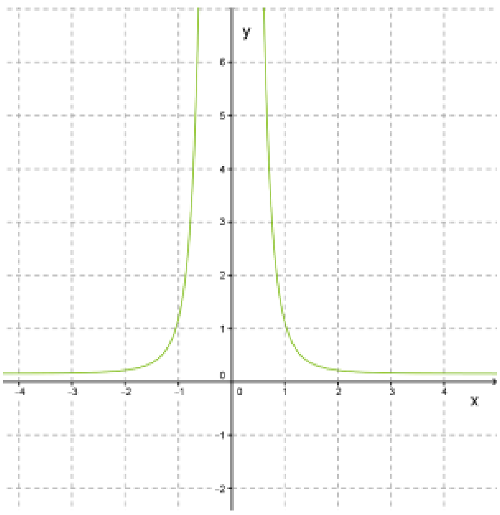

Рисунок 4 – график функции $y=x^{-n}$, при n — чётное число

Например, такой вид принимают графики функций $y=x^{-4}$,$y=x^{-8}$.

График степенной функции $y=x^{-n}$, в случае, когда n — **нечётное число** (5,7,9...), принимает вид гиперболы:

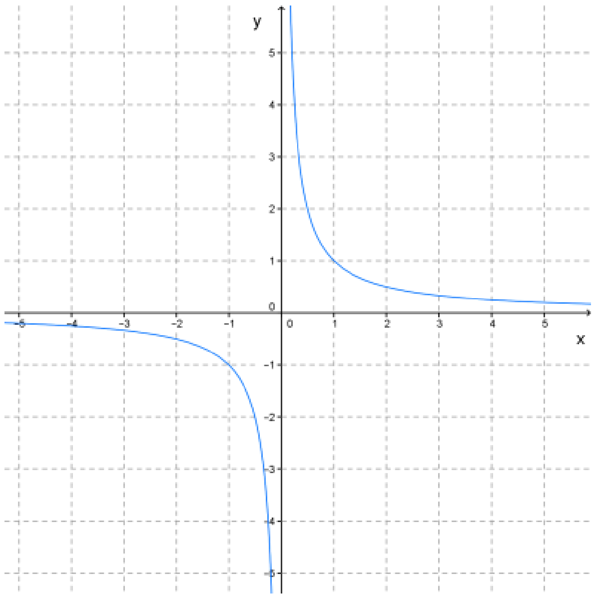

Рисунок 5 – график функции $y=x^{-n}$, при n — нечётное число

Например, такой вид принимают графики функций $y=x^{-5}$,$y=x^{-11}$.

Функции такого вида называются дробно-линейными.

Рассмотрим графики степенных функций $y=x^{m/n}$ с **положительным дробным показателем** m/n.

1. Степенная функция $y = x^{\frac{m}{n}}$, где $\frac{m}{n} > 1$> **неправильная дробь** (числитель больше знаменателя).

График — ветвь параболы:

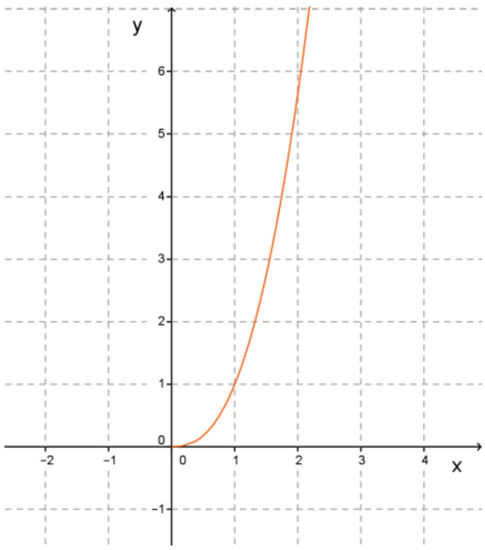

Рисунок 6 – $y = x^{\frac{m}{n}}$, где $\frac{m}{n} > 1$

Свойства функции $y = x^{\frac{m}{n}}$, где $\frac{m}{n} > 1$

1.D(f)=[0;+∞);

2.E(f)=[0;+∞);

3. не является ни чётной, ни нечётной;

4. возрастает при x∈[0;+∞);

5. не имеет наибольшего значения, $y_{наим}$=0;

6. не ограничена сверху, ограничена снизу;

7. выпукла вниз;

8. непрерывна.

2. Степенная функция $y = x^{\frac{m}{n}}$, где $0 < \frac{m}{n} < 1$ — **правильная дробь** (числитель меньше знаменателя).

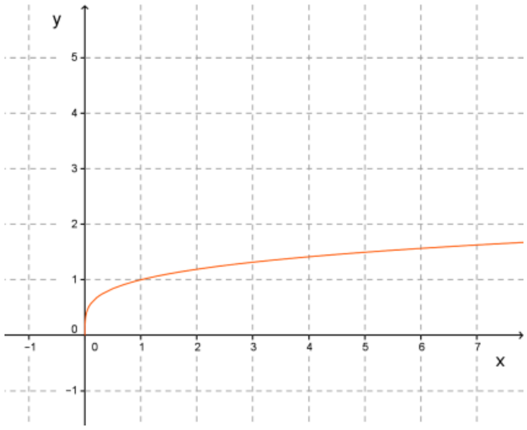

Рисунок 7 - функция $y = x^{\frac{m}{n}}$, где $0 < \frac{m}{n} < 1$

Свойства функции $y = x^{\frac{m}{n}}$, где $0 < \frac{m}{n} < 1$

1.D(f)=[0;+∞);

2.E(f)=[0;+∞);

3. не является ни чётной, ни нечётной;

4. возрастает при x∈[0;+∞);

5. не имеет наибольшего значения, $y_{наим}$=0;

6. не ограничена сверху, ограничена снизу;

7. выпукла вверх;

8. непрерывна.

Рассмотрим степенные функции с **отрицательным дробным показателем** степени $y = x^{-\frac{m}{n}}$

График — ветвь гиперболы.

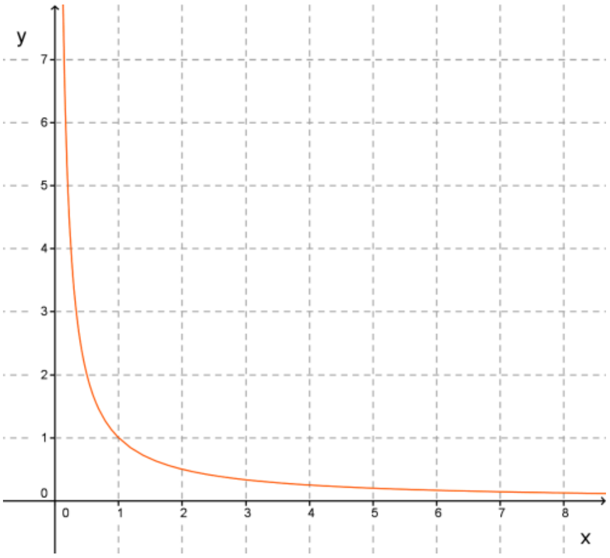

Рисунок 8 - функция $y = x^{-\frac{m}{n}}$

График имеет горизонтальную асимптоту *y*=0 и вертикальную асимптоту *x*=0.

Свойства функции $y = x^{-\frac{m}{n}}$.

1.D(f)=(0;+∞);

2.E(f)=(0;+∞);

3. не является ни чётной, ни нечётной;

4. убывает при x∈(0;+∞);

5. не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значения;

6. не ограничена сверху, ограничена снизу;

7. выпукла вниз;

8. непрерывна.

Итак, на основании всего вышеперечисленного, можно сделать вывод в виде таблицы:

Функция $y = x^p$	Область определения	Множество значений	Чётность, нечётность	Возрастание	Убывание
$p = 2n$, $n \in N$	R	$y \geqslant 0$	чётная	$x \geqslant 0$	$x \leqslant 0$
$p = 2n - 1$, $n \in N$	R	R	нечётная	$x \in R$	—
$p = -2n$, $n \in N$	R, $x \neq 0$	$y > 0$	чётная	$x < 0$	$x > 0$
$p = -(2n - 1)$, $n \in N$	R, $x \neq 0$	R, $y \neq 0$	нечётная	—	$x < 0$, $x > 0$
$p > 0$, $p \in R$, p — нецелое	$x \geqslant 0$	$y \geqslant 0$	—	$x \geqslant 0$	—
$p < 0$, $p \in R$, p — нецелое	$x > 0$	$y > 0$	—	—	$x > 0$

Таблица 1 – вывод

Изобразите схематически график функции $y = \frac{-4}{x+4}$

Графиком данной функции является гипербола.

Возьмем точки:

X	-3	-5	-2	-6	0	-8
y	-4	4	-2	2	-1	1

Верный ответ:

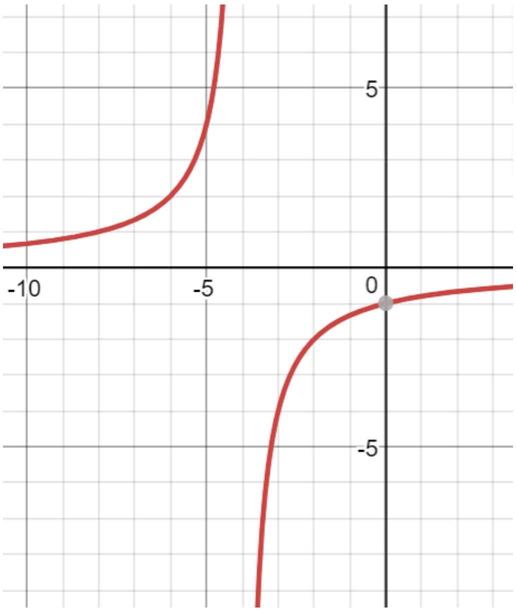

Рисунок 10 – график функции $y = \frac{-4}{x+4}$

Домашняя работа: Изучить материал, записать вывод в виде таблицы и ответить на вопросы:

1. Область определения функции $y=x^7$.

1) (0;+∞);   3) (-∞;0);
2) (-∞;0];   4) (-∞;+∞).

2. Множество значений функции x^5:

1) (-∞;+∞);   3) (0;+∞);
2) (-∞;0];   4) (-∞;0).

3. Функция $y=x^{-3}$ является:

1) возрастающей;   3)постоянной;
2) убывающей;   4) другой ответ.

4. Сравнить число $5{,}2^{0,3}$ с единицей :

1) $5{,}2^{0,3}<1$;   3) $5{,}2^{0,3}> 1$;
2) $5{,}2^{0,3} =1$;   4) $0 < 5{,}2^{0,3}<1$.

5. *Функция $y=x^{\pi}$* лежит выше графика функции y=x:

1) (1; +∞);   3) (0;+∞);
2) [0;1);   4) (1;3).