Свойства функции: монотонность, чётность, нечётность, ограниченность, периодичность

Цели:

Студенты должны знать понятия монотонность, чётность, нечётность, ограниченность, периодичность
Развивать умения исследования функций.

Монотонность функции.

Опр. Функция называется ***возрастающей*** (в некотором промежутке), если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции.

Чтобы по графику функции ***y = f(x)***, определить промежутки возрастания функции, нужно, двигаясь слева направо по линии графика функции, выделить промежутки значений аргумента ***x***, на которых **график идет вверх**.

Опр. Функция называется ***убывающей*** (в некотором промежутке), если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.

Чтобы по графику функции определить промежутки убывания функции, нужно, двигаясь слева направо вдоль линии графика функции, выделить промежутки значений аргумента ***x***, на которых **график идет вниз**

Опр. Функция наз**.** ***монотонной,*** если она только возрастает, или только убывает.

Четность (нечетность) функции.

Опр. Функция называется ***четной,*** если при изменении знака аргумента на противоположный, значение функции не меняется, т.е. ***f(-x) = f(x)***

График четной функции симметричен относительно оси ординат (ось у).

Опр. Функция называется ***нечетной,*** если при изменении знака аргумента на противоположный значение функции тоже меняется на противоположное, т.е. ***f(-x) = - f(x)***

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Опр. Функции, которые не являются четными и не являются нечетными называются функциями ***общего вида***.

Ограниченность

Опр. Функция называется ***ограниченной***, если существует такое положительное число М, что $|f(x)| \leq M$ для всех значений х. Если такого числа не существует, то функция - неограниченная.

Периодичность функции.

Опр. Функция f(x) - ***периодическая***, если существует такое отличное от нуля число ***T***, что для любого ***x*** из области определения функции имеет место***: f(x+T) = f(x).***

Число ***T*** называется ***периодом*** функции.

Все тригонометрические функции являются периодическими.

Пример 1.

Исследовать на монотонность функцию:

а) $y = x^3 + 2$; **б)** $y = 5 - 2x$.

Решение:

а) Возьмем произвольные значения аргумента x_1 и x_2 и пусть $x_1 < x_2$. Тогда, по свойствам числовых неравенств будем иметь:

$$x_1^3 < x_2^3;$$
$$x_1^3 + 2 < x_2^3 + 2.$$

Последнее неравенство означает, что $f(x_1) < f(x_2)$. Итак, из $x_1 < x_2$ следует $f\{x_1) < f(x_2)$, а это означает, что заданная функция возрастает (на всей числовой прямой).

б) Если $x_1 < x_2$, то $-2x_1 > -2x_2$; далее имеем $5 - 2.x_1 > 5 - 2x_2$, т.е. $f(x_1) > f(x_2)$.

Итак, из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) > f(x_2)$, а это означает, что заданная функция убывает (на всей числовой прямой).

Пример 2. Исследовать на ограниченность функцию $y = \sqrt{9 - x^2}$.

Решение.С одной стороны, вполне очевидно неравенство $\sqrt{9 - x^2} \geqslant 0$ (по определению квадратного корня $\sqrt{a} \geqslant 0$). Это означает, что функция ограничена снизу. С другой стороны, имеем $9 - x^2 \leqslant 9$, а потому $\sqrt{9 - x^2} \leqslant 3$.

Пример 3.

Исследовать на монотонность функцию:

а) $y = x^3 + 2$; **б)** $y = 5 - 2x$.

Решение:

а) Возьмем произвольные значения аргумента x_1 и x_2 и пусть $x_1 < x_2$. Тогда, по свойствам числовых неравенств будем иметь:

$$x_1^3 < x_2^3;$$
$$x_1^3 + 2 < x_2^3 + 2.$$

Последнее неравенство означает, что $f(x_1) < f(x_2)$. Итак, из $x_1 < x_2$ следует $f\{x_1) < f(x_2)$, а это означает, что заданная функция возрастает (на всей числовой прямой).

б) Если $x_1 < x_2$, то $-2x_1 > -2x_2$; далее имеем $5 - 2.x_1 > 5 - 2x_2$, т.е. $f(x_1) > f(x_2)$.

Итак, из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) > f(x_2)$, а это означает, что заданная функция убывает (на всей числовой прямой).

Пример 4. Исследовать на ограниченность функцию $y = \sqrt{9 - x^2}.$

Решение.С одной стороны, вполне очевидно неравенство $\sqrt{9 - x^2} \geq 0$ (по определению квадратного корня $\sqrt{a} \geq 0).$ Это означает, что функция ограничена снизу. С другой стороны, имеем $9 - x^2 \leq 9,$ а потому $\sqrt{9 - x^2} \leq 3.$

Пример 5. Исследуйте функцию на чётность/нечётность:

а) $y = \sqrt{4 - x^2}$.

Решение: Функция определена на множестве $|x| \leq 2$, симметричном относительно нуля. Найдём $f(-x)$: $f(-x) = \sqrt{4 - (-x)^2} = \sqrt{4 - x^2} = f(x)$ для любого x из области определения. Следовательно, данная функция является чётной.

Ответ: функция чётная.

б) $y = \sqrt{2x - 1}$.

Решение: Область определения данной функции находится из неравенства $2x - 1 \geq 0$. Промежуток, заданный неравенством $x \geq \frac{1}{2}$, несимметричен относительно нуля. Значит, данная функция не относится ни к чётным, ни к нечётным.

Ответ: функция не относится ни к чётным, ни к нечётным.

Домашнее задание:

1. Составить конспект урока.
2. Исследуйте функцию на чётность/нечётность: $y = 7x^2 - x$

3. Исследуйте функцию на монотонность: $y = x^3 + x$

Задания выполнить в тетради, сделать снимок и отправить на электронную почту до 15:00 23 марта 2020г.