Урок № 182 – 183.

Тема: Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба.
Схема полного исследования функции с помощью производной.

Вторая производная. Если производная $f'(x)$ функции $f(x)$ дифференцируема в точке (x_0), то её производная называется *второй производной* функции $f(x)$ в точке (x_0), и обозначается $f''(x_0)$.

Функция $f(x)$ называется ***выпуклой*** на интервале (a, b), если её график на этом интервале лежит *ниже* касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в любой точке $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (a, b)$.

Функция $f(x)$ называется ***вогнутой*** на интервале (a, b), если её график на этом интервале лежит *выше* касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в любой точке $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (a, b)$.

Достаточное условие вогнутости (выпуклости) функции.

Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема (имеет *вторую* производную) на интервале (a, b), тогда:

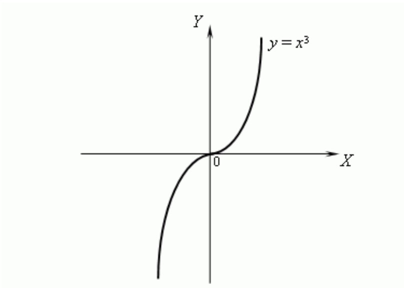
если $f''(x) > 0$ для любого $x \in (a, b)$, то функция $f(x)$ является ***вогнутой*** на интервале (a, b);

если $f''(x) < 0$ для любого $x \in (a, b)$, то функция $f(x)$ является ***выпуклой*** на интервале (a, b) .

Точка, при переходе через которую функция меняет выпуклость на вогнутость или наоборот, называется ***точкой перегиба***. Отсюда следует, что если в точке перегиба x_0 существует вторая производная $f''(x_0)$, то $f''(x_0) = 0$.

П р и м е р .

Рассмотрим график функции $y = x^3$:



Эта функция является вогнутой при $x > 0$ и выпуклой при $x < 0$. В самом деле, $y'' = 6x$, но $6x > 0$ при $x > 0$ и $6x < 0$ при $x < 0$, следовательно, $y'' > 0$ при $x > 0$ и $y'' < 0$ при $x < 0$, откуда следует, что функция $y = x^3$ является вогнутой при $x > 0$ и выпуклой при $x < 0$. Тогда $x = 0$ является точкой перегиба функции $y = x^3$.

- Если вторая производная равна 0, то это точка перегиба.
- Если вторая производная больше 0, то на этом интервале график обладает выпуклостью вниз.
- Если вторая производная меньше 0, то на этом интервале график обладает выпуклостью вверх.

Продолжим уточнение построения графика рассматриваемой функции $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2-3$

Так как $f'(x)=x^3-4x$, то $f''(x)=3x^2-4$, $f''(x)=0$ при $x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$, $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$

Причём, при $x<-\frac{2}{\sqrt{3}}$ и $x>\frac{2}{\sqrt{3}}$ вторая производная больше 0, то есть на этих интервалах график обладает выпуклостью вниз.

При $-\frac{2}{\sqrt{3}} < x < \frac{2}{\sqrt{3}}$ вторая производная меньше 0, то есть на этом интервале график обладает выпуклостью вверх.

Схема полного исследования функции с помощью производной.

Схема исследования функции

1. Найти область определения функции;
2. Исследовать функцию на четность, нечетность, периодичность;
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат;
4. Исследовать функцию на монотонность, то есть найти промежутки возрастания и убывания функции;
5. Найти точки экстремума и экстремальные значения функции;
6. Построить график функции.

1. Находим [область определения]() ***D(f)*** функции *y = f(x).*

2. Проверяем функцию на **четность.**

Если ***f(-x) = f(x),*** то функция **четная,** график функции симметричен относительно оси OY.

Если ***f(-x) = - f(x),*** то функция **нечетная,** график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

В противном случае функция является ни четной, ни нечетной.

3. Если функция **периодическая**, то находим период функции.

4. Находим **точки пересечения графика с осями координат.**

Находим **нули функции - это точки пересечения графика функции с осью абсцисс (Ox).**

Для этого мы решаем уравнение ***f(x) = 0.***

Находим **точку пересечения графика функции с осью ординат (Oy).** Для этого ищем **значение функции** при ***x=0***.

5. Находим **промежутки знакопостоянства функции**, то есть промежутки, на которых функция сохраняет знак. Это нам потребуется для контроля правильности построения графика.

Чтобы найти промежутки знакопостоянства функции, нам нужно решить неравенства ***f(x) >0*** и ***f(x) <0*** .

6. Исследуем функцию с помощью производной: находим **промежутки возрастания и убывания** функции, а также **точки максимума и минимума**.

Для этого мы следуем привычному алгоритму.

а) Находим производную $f'(x)$

б) Приравниваем производную к нулю и находим корни уравнения $f'(x) = 0$
 - это стационарные точки.

в) Находим промежутки знакопостоянства производной. Промежутки, на которых **производная положительна**, являются **промежутками возрастания функции**.

Промежутки, на которых **производная отрицательна**, являются **промежутками убывания функции**.

Точки, в которых **производная меняет знак с плюса на минус**, являются **точками максимума**.

Точки, в которых **производная меняет знак с минуса на плюс**, являются **точками минимума**.

7. Найти **значения функции в точках экстремума.**

8. По данным исследования **построить график функции**.

Пример 1. Исследовать функцию и по результатам исследования построить график.

$$f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$$

Решение.

1) D(f): R

2) Проверим функцию на чётность/нечётность:

$f(-x) = (-x)^3 - \frac{5}{2}\cdot(-x)^2 - 2\cdot(-x) + \frac{3}{2} = -x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2}$, $f(-x) \neq f(x), f(-x) \neq -f(x)$, значит, данная функция не является чётной или нечётной.

3) Функция непериодическая.

4) Нули функции.

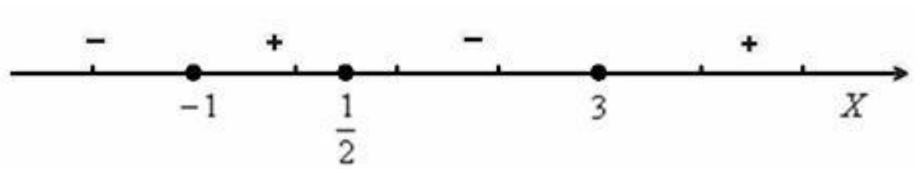
С осью *Oy*: $y = f(0) = 0^3 - \frac{5}{2}\cdot 0^2 - 2\cdot 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

Чтобы найти точки пересечения с осью Ox (нули функции) требуется решить уравнение *f(x) = 0*:

$$x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0$$

$$(x+1)\cdot\left(x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$x = -1,\ x = \frac{1}{2},\ x = 3$$



5) Таким образом, на интервалах $(-\infty; -1), \left(\frac{1}{2}; 3\right)$ график расположен ниже оси абсцисс *f(x)<0*, а на интервалах $\left(-1; \frac{1}{2}\right), (3; +\infty)$ – выше данной оси *f(x) >0.*

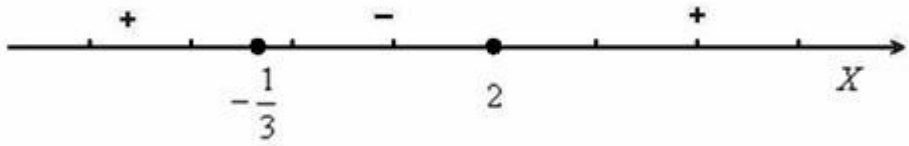
6) Возрастание, убывание.

Найдём критические точки:

$$f'(x)=\left(x^3-\frac{5}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}\right)'=3x^2-5x-2=0$$

$$x=-\frac{1}{3},\ x=2$$

Отложим их на числовой прямой и определим знаки производной:



1

Следовательно, функция возрастает на $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$ и $(2;+\infty)$ и убывает на $\left(-\frac{1}{3};2\right)$.

7). Экстремумы функции

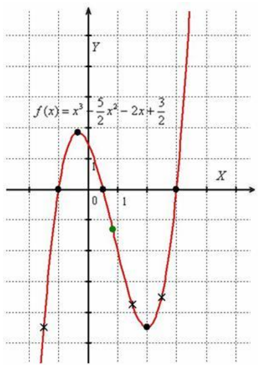
$x=-\frac{1}{3}$ точка максимума, так как при переходе через нее производная меняет знак с «+» на «-»

. $x=2$ точка минимума, так как при переходе через нее производная меняет знак с «-» на «+».

8). $f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{27}-\frac{5}{18}+\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=\frac{50}{27}\approx 1{,}85$

: $f(2)=8-10-4+\frac{3}{2}=-\frac{9}{2}=-4\frac{1}{2}$.

9) Строим график функции.



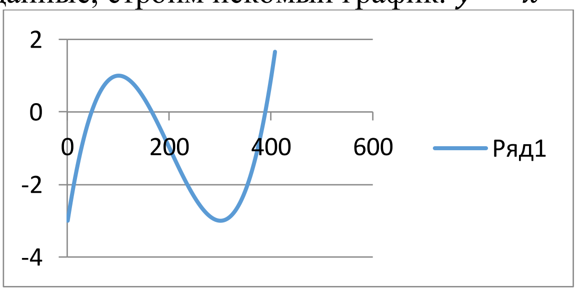
9) Построить график, используя полученные результаты исследования.

Пример 2 . Построить график функции $y=\ x^3-6x^2+9x-3$.

1. Функция определена на всей числовой прямой, т.е. $D(y)=R$.
2. Данная функция не является ни четной, ни нечетной; кроме того, она не является периодической.
3. Найдем точку пересечения графика с осью Oy: полагая $x=0$, получим $y=-3$. Точки пересечения графика с осью Ox в данном случае найти затруднительно.
4. Очевидно, что график функции не имеет асимптот.
5. Найдем производную: $y'=\ 3x^2-12x+9$. Далее, имеем ($3x^2-12x+9=0$) $\Leftrightarrow$ $(x^2-4x+3=0)\Leftrightarrow\left[\begin{matrix}x=1\\x=3\end{matrix}\right.$.

Точки $x=1$ и $x=3$ делят область определения функции на три промежутка: $-\infty<x<1$, $1<x<3$, $3<x<\infty$. В промежутках $-\infty<x<1$ и $3<x<\infty$ $y'>0$, то есть функция возрастает, а в промежутке $1<x<3$ $y'<0$, то есть функция убывает. При переходе через точку $x=1$ производная меняет знак с плюса на минус, а при переходе через точку $x=3$ - с минуса на плюс. Значит, $y_{max}=y(1)==1,\ y_{min}=y(3)=\ -3$.

6. Найдем вторую производную: $y''=6x-12;\ 6x-12=0,\ x=2$. Точка $x=2$ делит область определения функции на два промежутка $-\infty<x<2$ и $2<x<\infty$. В первом из них $y''<0$, а во втором $y''>0$, то есть в промежутке $-\infty<x<2$ кривая выпукла вверх, а в промежутке $2<x<\infty$ выпукла вниз. Таким образом, получим точку перегиба (2;-1).
7. Используя полученные данные, строим искомый график. $y=\ x^3-6x^2+9x-3$



Задание №1. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график

$$y = 3x^2 - x^3.$$

Выполненное задание присылаем мне на электронную почту, при этом не забываем подписывать свои работы. Удачи!