Урок № 172. Тема: Производная тригонометрических функций.

К основным тригонометрическим функциям относятся следующие функцииий: синус (sinx), косинус (cosx),тангенс (tg x), котангенс (ctg x).

Для каждой из этих функций существует обратная тригонометрическая функция. Они называются, соответственно, арксинус (arcsinx), арккосинус (arccosx), арктангенс (arctg x), арккотангенс(arcctg x),

Все указанные функции непрерывны и дифференцируемы в своей области определения. Мы уже знаем производные для *синуса* и *косинуса*. Они имеют следующий вид: $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$.

Используя правило дифференцирования частного двух функций, легко получить выражение для производной тангенса:

$$(\mathrm{tg}\ x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \left(\frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{(\cos x)^2}\right) = \frac{\cos x \cos x - \sin x\ (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

аналогично находится и производная котангенса, то есть

$$(\mathrm{ctg}\ x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \left(\frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{(\sin x)^2}\right) = = -\frac{\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Пример 1. Найдите производную функции y=1,2sinx.

$$y' = (1{,}2\sin x)' = 1{,}2(\sin x)' = 1{,}2\cos x.$$

Пример 2. Найдите производную функции y=122-2cos x.

$$y' = (122 - 2\cos x)' = 0 - 2(\cos x)' = -2(-\sin x) = 2\sin x$$

Пример 3. Найдите производную функции y=tgx

$$y' = (tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} =$$

$$\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Пример 4. Найдите производную функции y=tg2x.

$$y' = (tg2x)' = \frac{1}{\cos^2 2x}\cdot(2x)' = \frac{2}{\cos^2 2x}$$

Производные обратных тригонометрических функций имеют следующий вид:

$$(\boldsymbol{arcsinx})' = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}}$$

$$(\boldsymbol{arccosx})' = -\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}}$$

$$(\boldsymbol{arctgx})' = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}$$

$$(\boldsymbol{arcctgx})' = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ:

ВЫЧИСЛИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ X_0:

а) f(x)=sinx – cosx, $x_0=\frac{\pi}{4}$; б) f(x)= 3sinx + 2cosx, $x_0=\frac{\pi}{3}$;

в) f(x)=tgx – $\sqrt{3}$ctgx, $x_0=\frac{\pi}{6}$; г) f(x)=ctgx – $\frac{\sqrt{3}}{3}$ tgx, $x_0=\frac{\pi}{3}$;.