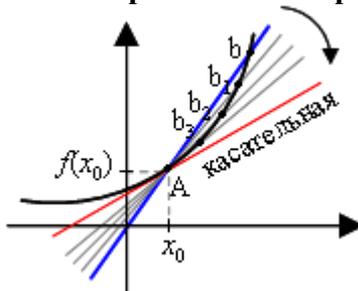


Урок № 176.

Практическое занятие №39. Составления уравнения касательной к графику функции.

Цели: научиться находить угловой коэффициент касательной к графику функции в заданной точке; составлять уравнения касательных к графику функции по заданным условиям.

Краткая теоретическая справка.



Строгое определение касательной:

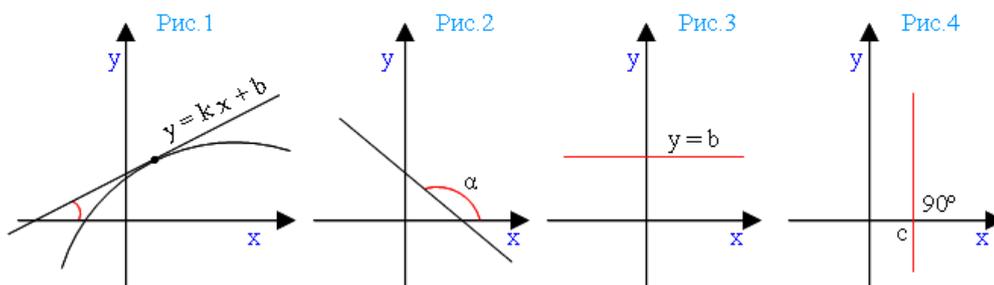
Касательная к графику функции f , дифференцируемой в точке x_0 , - это прямая, проходящая через точку $(x_0; f(x_0))$ и имеющая угловой коэффициент $f'(x_0)$.

Угловой коэффициент имеет прямая вида $y = kx + b$. Коэффициент k и является **угловым коэффициентом** этой прямой.

Угловой коэффициент равен тангенсу острого угла, образуемого этой прямой с осью абсцисс:

$$k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0).$$

Здесь угол α – это угол между прямой $y = kx + b$ и положительным (то есть против часовой стрелки) направлением оси абсцисс. Он называется **углом наклона прямой**.



Если угол наклона прямой $y = kx + b$ острый, то угловой коэффициент является положительным числом. График возрастает (рис.1).

Если угол наклона прямой $y = kx + b$ тупой, то угловой коэффициент является отрицательным числом. График убывает (рис.2).

Если прямая параллельна оси абсцисс, то угол наклона прямой равен нулю. В этом случае угловой коэффициент прямой тоже равен нулю (так как тангенс нуля есть ноль). Уравнение прямой будет иметь вид $y = b$ (рис.3).

Если угол наклона прямой равен 90° ($\pi/2$), то есть она перпендикулярна оси абсцисс, то прямая задается равенством $x = c$, где c – некоторое действительное число (рис.4).

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Алгоритм решения уравнения касательной к графику функции $y = f(x)$:

1. Вычислить $f(x_0)$.
2. Вычислить производные $f'(x)$ и $f'(x_0)$.
3. Внести найденные числа x_0 , $f(x_0)$, $f'(x_0)$ в уравнение касательной и решить его.

Порядок выполнения работы.

1. Внимательно изучите теоретическую справку по теме.
2. Решите следующие задания.

Пример1. Найдем уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ в точке с абсциссой 2.

Решение.

Следуем алгоритму.

1) Точка касания x_0 равна 2. Вычислим $f(x_0)$:

$$f(x_0) = f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 1 = 8 - 8 + 1 = 1$$

2) Находим $f'(x)$. Для этого применяем формулы дифференцирования, изложенные в предыдущем разделе. Согласно этим формулам, $x^2 = 2x$, а $x^3 = 3x^2$. Значит:

$$f'(x) = 3x^2 - 2 \cdot 2x = 3x^2 - 4x.$$

Теперь, используя полученное значение $f'(x)$, вычислим $f'(x_0)$:

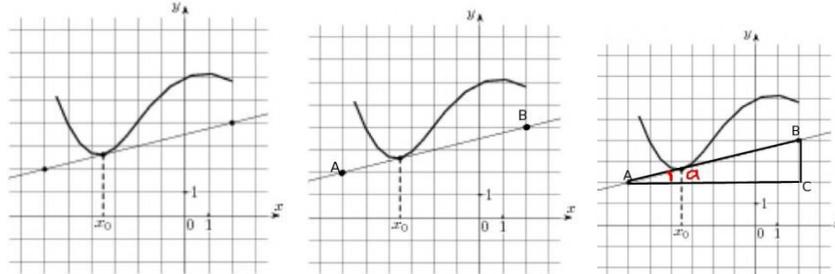
$$f'(x_0) = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 12 - 8 = 4.$$

3) Итак, у нас есть все необходимые данные: $x_0 = 2$, $f(x_0) = 1$, $f'(x_0) = 4$. Подставляем эти числа в уравнение касательной и находим окончательное решение:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 1 + 4 \cdot (x - 2) = 1 + 4x - 8 = -7 + 4x = 4x - 7.$$

Ответ. $y = 4x - 7$.

Пример 2. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции в точке x_0 .



Значение производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 равно тангенсу угла между касательной и положительным направлением оси Ox . Чтобы его найти, выделим прямоугольный треугольник, гипотенуза которого лежит на касательной, а катеты параллельны осям координат. Обозначим точки с целыми координатами буквами A и B - эти точки выделены на касательной:

Проведем через точку A прямую параллельно оси Ox , а через точку B - параллельно оси Oy . Получим прямоугольный треугольник ABC . Угол A треугольника ABC равен углу между касательной и положительным направлением оси Ox .

Тангенс острого угла прямоугольного треугольника равен отношению противолежащего катета к прилежащему. Длины катетов считаем по количеству клеточек

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{8} = 0,25$$

Ответ. 0,25.

Пример 3. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции

$$y = \frac{x^4}{4} \text{ в точке с абсциссой } x_0=1.$$

Решение. Находим производную функции

$$f'(x) = \left(\frac{x^4}{4} \right)' = x^3$$

Тогда при $x_0=1$ значение производной равно

$$f'(1) = 1^3 = 1$$

Отсюда получаем, что угловой коэффициент касательной в точке с абсциссой $x_0=1$ равен $k = f'(1) = 1$

Ответ. 1.

Пример 4. Прямая $y = 8x - 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 7x + 7$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение. Условием параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов, следовательно $k=8$. Угловой коэффициент касательной - это есть значение производной функции в точке x_0 . $f'(x_0) = 2x_0 + 7 = 8$, $2x_0 = -1$, $x_0 = -0,5$.

Ответ. -0,5.

3. ВЫПОЛНИТЬ ЗАДАНИЕ:

Задание №1. Составьте уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке x_0 .

$$y = x - 3x^2, x_0 = 2$$

Задание №2. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в точке x_0 .

$$y = 6x - \operatorname{tg} x, x_0 = 0$$

Задание №3. Прямая параллельна касательной к графику функции $y = f(x)$. Найдите абсциссу точки касания.

$$y = 4x + 8, y = x^2 - 5x + 7$$

Решение присылаем мне на почту, при этом не забываем подписывать работу.