Урок № 272 – 273.
Тема: Показательные неравенства. Основные приемы их решения.
Тема: Практическое занятие № 78. Решение показательных неравенств.

Цели: развивать вычислительные навыки при решении показательных неравенств; сформировать понятие показательного неравенства; рассмотреть способы решения показательных неравенств и способствовать выработке навыков их решения.

1) ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНОГО НЕРАВЕНСТВА И СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ.

Определение: Показательные неравенства – это неравенства, в которых неизвестная находится в показателе степени.

Определение: Неравенство вида $a^x > a^b$,где $a>0$, $a\neq 1$ называется простейшим показательным неравенством.

- Что значит решить неравенство? (Найти множество его решений или установить, что их нет)

- Как решить простейшее показательное неравенство?

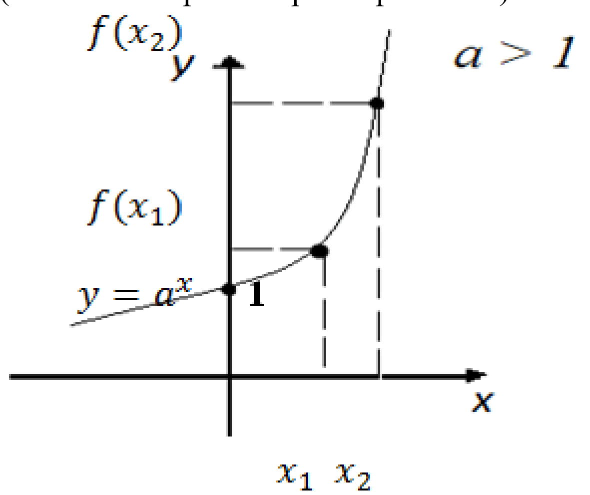
Рассмотрим график функции $y=a^x$ при $a>1$ и произвольное значение этой функции a^b, где b – любое действительное число.

– Каким свойством обладает данная функция? **(возрастает).**

– Тогда при каких значениях переменной x $a^x < a^b$ (ниже)? (при $x < b$).

– А при каких $a^x > a^b$ (Выше)? (при $x > b$).

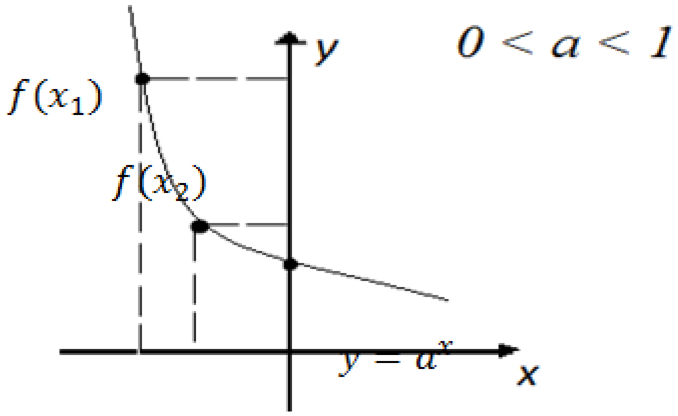
Таким образом, если показательная функция возрастает, то знак неравенства сохраняется. (Аналогично рассмотреть при $0<a<1$).



$x_2 > x_1$

$f(x_2) > f(x_1)$

функция $y = a^x$ возрастает



$x_1 \quad x_2$

$x_2 > x_1$

$f(x_2) < f(x_1)$

функция $y = a^x$ убывает

2) 1 способ: Уравнивание оснований

- Именно на свойствах возрастания и убывания показательной функции основан первый способ решения показательных неравенств – **уравнивание оснований** (в тетрадь).

Неравенство $\mathbf{a^{f(x)} > a^{g(x)}}$, где a>0, a≠1 будет равносильно неравенству

при a>1 (y = a^x возрастает) — **f(x)>g(x)** (знак неравенства сохраняется)

при 0<a<1 (y = a^x убывает) — **f(x)<g(x)** (знак неравенства изменяется на противоположный)

<u>В тетрадь:</u> **при a>1, y = a^x возрастает, то знак неравенства сохраняется**

при 0<a<1, y = a^x убывает, то знак неравенства изменяется

Примеры решения неравенств. № 228(1-4) – устно

Пример №1. Решить неравенство: $3^x > 9.$

Правило: привести к одинаковому основанию.

$3^x > 3^2$

Так как основание больше 1, знак неравенства не меняется $(3 > 1).$

$x > 2$

Ответ: $(2; +\infty)$

Пример №2. Решить неравенство: $4^x \le 1.$

$4^x \le 4^0$

Так как основание больше 1, знак неравенства не меняется $(4 > 1).$

$x \le 0$

Ответ: $(-\infty; 0]$

Пример №3. Решить неравенство: $\left(\frac{1}{2}\right)^x \le \frac{1}{4}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x \le \left(\frac{1}{2}\right)^2$

Так как основание меньше 1, знак неравенства меняется $\left(\frac{1}{2} < 1\right)$

$x \geq 2$

Ответ: $[2; +\infty)$

Пример №4. Решить неравенство: $5^x < -5$

Вспоминаем свойства показательной функции: $a^x > 0$, значит, $5^x > 0$. Данное неравенство не имеет решений.

Пример №5. Решить неравенство: $4^x > -4$

По аналогии с предыдущим неравенством: $4^x > 0$ (а, значит, $4^x > -4$) для всех x из области определения, то есть $x \in (-\infty; +\infty)(\text{или } x \in R, \text{или } x - \text{любое})$.

Показательные неравенства, которые сводятся к простейшим

Пример №6. $0{,}7^{3x-1} > 0{,}49$

$0{,}7^{3x-1} > (0{,}7)^2$

Так как основание меньше 1, знак неравенства меняется $(0{,}7 < 1)$

$3x - 1 < 2$

$3x < 3$

$x < 1$

Ответ: $(-\infty; 1)$

Пример №7. Решите неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} > 4.$

Рассмотрим решение данного неравенства двумя способами.

1 способ:

Приведем обе части неравенства к основанию 2: $\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{-1}.$

$(2^{-1})^{-x} = 2^x$

$2^x > 4$

$2^x > 2^2$

Так как основание больше 1, знак неравенства не меняется $(2 > 1).$

$x > 2$

2 способ:

Приведем обе части неравенства к основанию $\frac{1}{2}$: $4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

Так как основание меньше 1, знак неравенства меняется $\left(\frac{1}{2} < 1\right).$

$-x < -2$

$x > 2$

Ответ: $(2; +\infty)$

Пример №8. Решите неравенство $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{5x-6}.$

Подсказка: чтобы не ошибиться, лучше приводить обе части неравенства к основанию больше 1, так как в этом случае нет риска забыть о смене знака неравенства.

Вспомним, что: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \left(\frac{b}{a}\right)^{1}$

Поэтому: $\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$

$$\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right)^{x^2} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{5x-6}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{5x-6}$$

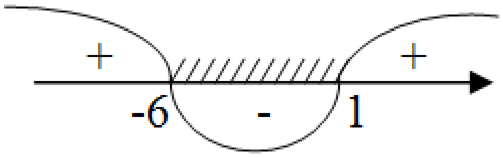
Так как основание больше 1, знак неравенства не меняется $\left(\frac{3}{2} > 1\right)$.

$-x^2 \geq 5x - 6 \mid \cdot (-1)$

$x^2 \leq -5x + 6$

$x^2 + 5x - 6 \leq 0$

$x_1 = 1;\ \ x_2 = -6.$



Ответ: $[-6; 1]$

Пример №9. Решите неравенство $4^x \cdot 2^{x^2+1} > 16.$

Приведем обе части неравенства к основанию 2: $4 = 2^2; 16 = 2^4.$

$(2^2)^x \cdot 2^{x^2+1} > 2^4$

$2^{2x} \cdot 2^{x^2+1} > 2^4$

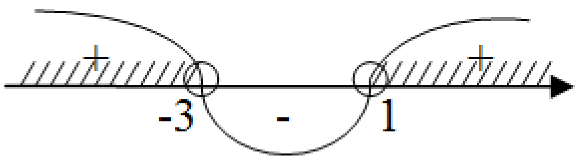
$2^{2x+x^2+1} > 2^4$

Так как основание больше 1, знак неравенства не меняется $(2 > 1)$.

$x^2 + 2x + 1 > 4$

$x^2 + 2x - 3 > 0$

$x_1 = 1; x_2 = -3.$



Ответ: $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$

2) Показательные неравенства, которые решаются с помощью вынесения общего множителя

Пример №10. Решите неравенство $3^{x+2} - 3^x \leq 24.$

$3^{x+2} = 3^x \cdot 3^2$

$3^x(3^2 - 1) \leq 24$

$3^x \cdot 8 \leq 24 \mid : 8$

$3^x \leq 3$

Так как основание больше 1, знак неравенства не меняется $(3 > 1)$.

$x \leq 1$

Ответ: $(-\infty; 1]$

3) Показательное неравенство, которое решается с помощью замены

а) Сводящиеся к квадратным

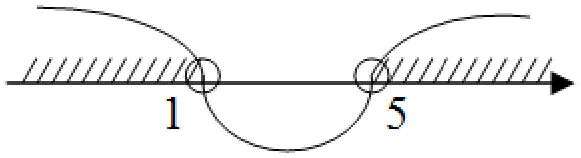
Пример №11. Решите неравенство: $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 > 0$

Замена: $5^x = t$

$25^x = (5^x)^2 = t^2$

$t^2 - 6t + 5 > 0$

$t_1 = 1; t_2 = 5$



$\left[\begin{array}{l} t < 1 \\ t > 5 \end{array}\right.$

Обратная замена:

$\left[\begin{array}{l} 5^x < 1 \\ 5^x > 5 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 1 \end{array}\right.$

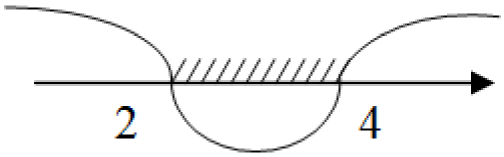
Ответ: $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$

Пример №12. Решите неравенство: $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 \leq 0$

Замена: $2^x = t$

$t^2 - 6t + 8 \leq 0$

$t_1 = 2; t_2 = 4$



$2 \leq t \leq 4$

Обратная замена:

$2 \leq 2^x \leq 4$

$1 \leq x \leq 2$

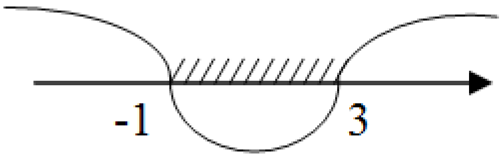
Ответ: $[1; 2]$

Пример №13. Решите неравенство: $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 \leq 0$

Замена: $3^x = t$

$t^2 - 2t - 3 \leq 0$

$t_1 = -1; t_2 = 3$



$-1 \leq t \leq 3$

Обратная замена:

$-1 \leq 3^x \leq 3$

Левое неравенство, как мы помним, выполняется всегда.

$3^x \leq 3$

$x \leq 1$

Ответ: $(-\infty; 1]$

4) Однородные показательные неравенства

Пример №14. Решите неравенство: $4 \cdot 9^x - 7 \cdot 12^x + 3 \cdot 16^x > 0$

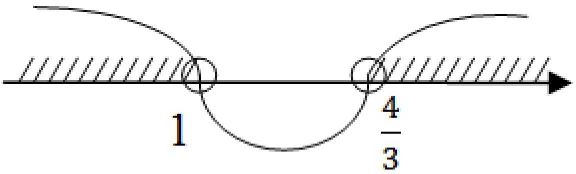
$4 \cdot 9^x - 7 \cdot 12^x + 3 \cdot 16^x > 0 \; |: 9^x$

$3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 7 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{x} + 4 > 0$

Замена: $\left(\frac{4}{3}\right)^{x} = t$

$3t^2 - 7t + 4 > 0$

$t_1 = 1; t_2 = \frac{4}{3}$



$\left[\begin{array}{l} t < 1 \\ t > \frac{4}{3} \end{array}\right.$

Обратная замена:

$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{4}{3}\right)^{x} < 1 \\ \left(\frac{4}{3}\right)^{x} > \frac{4}{3} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 1 \end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$

2) ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ. (РЕШЕНИЕ ПРИСЫЛАЕМ МНЕ НА ПОЧТУ)

1. Решите неравенство:

а) $4^{5-2x} \leq 0{,}25$

б) $0{,}3^{7+4x} > 0{,}027$

в) $0{,}4^{2x+1} > 0{,}16$

г) $3^{2-x} < 27.$

2. Решите неравенство:

а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} - 10 \cdot 3^{-x} + 3 < 0$

б) $\left(\frac{1}{36}\right)^{x} - 5 \cdot 6^{-x} - 6 \leq 0$