

Тема урока: Практическое применение производной

Цели урока: добиться усвоения студентами систематических, осознанных знаний о понятии производной. Показать студентам на примерах из жизни механический и геометрический смысл производной. Научить использовать производную при решении задач прикладного характера.

Исторические сведения

Производная – одно из фундаментальных понятий математики. Оно возникло в 17 веке в связи с необходимостью решения задач и физики, и механики, и математики: в первую очередь следующих двух: определения скорости прямолинейного неравномерного движения и построения касательной к произвольной плоской кривой. Ко второй половине 17 века уже был ясно очерчен круг задач, решаемых методами дифференциального исчисления, выявлена связь понятий мгновенной скорости и касательной, разработаны отдельные методы решения задач. Однако еще не был создан алгоритм для решения таких задач, не было создано само дифференциальное исчисление.

Общая теория производных и методов их вычисления, т.е. теория дифференциального исчисления (независимо друг от друга) была разработана И. Ньютоном и Г.В.Лейбницем в конце 17 века.

Лейбниц (годы жизни 1646-1716)

Создатель Берлинской академии наук. Основоположник дифференциального исчисления, ввел большую часть современной символики математического анализа.

Лейбниц пришел к понятию производной, решая задачи проведения касательной к произвольной линии, объяснив тем самым ее геометрический смысл.

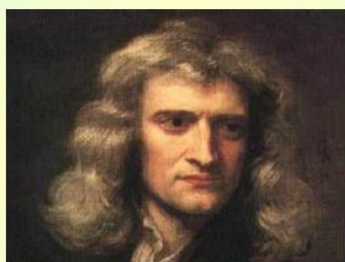
1. Геометрический смысл производной



«Если продолжить одно из маленьких звеньев ломаной, составляющей кривую линию, то эта продолженная таким образом сторона будет называться касательной к кривой.»

2. Механический смысл производной

**Исаак Ньютон
(1643 – 1727)**



«Когда величина является максимальной или минимальной, в этот момент она не течет ни вперед, ни назад.»

Исаак Ньютон (годы жизни 1643-1727гг) один из создателей дифференциального исчисления. Главный его труд «Математические начала натуральной философии» оказал колоссальное влияние на развитие естествознания. Ньютон ввел понятие производной, изучая законы механики, тем самым раскрыл ее физический смысл

Но, ни Ньютон, ни Лейбниц не дали четкого определения производной. Впервые четкое определение производной было сформулировано Огюстеном Коши, и именно это определение стало общепринятым и в настоящее время используется во всех курсах математического анализа. Термин «производная» и ее обозначение y' , $f'(x)$ ввел Лагранж, и мы до сих пор используем эти обозначения.

Применение физического смысла производной при решении физических задач.

Применение производной в различных областях науки и техники обширно. При изучении изменяющихся величин очень часто возникает вопрос о скорости, о быстроте происходящего изменения. Так мы говорим о скорости движения самолета, поезда, ракеты, вращения шкива и т. д. Можно говорить о скорости выполнения определенной работы, о скорости протекания химической реакции, о быстроте роста населения в данном городе. О скорости можно говорить по отношению к любой величине, которая изменяется с течением времени. Для всего этого используется понятие производной.

Так в физике:

1. Скорость- это производная от пути по времени $V(t) = S'(t)$
 2. Ускорение- это производная от скорости по времени $a(t) = V'(t)$
 3. Мощность- это производная от работы по времени $N(t) = A'(t)$
 4. Сила тока – это производная от заряда по времени $I(t) = q'(t)$
 5. Теплоемкость- это производная от количества теплоты по температуре $C(t) = Q'(t)$
- и т. д.

Механическое движение это изменение положения тела в пространстве относительно других тел с течением времени.

Основной характеристикой механического движения является скорость.

Алгоритм нахождения скорости тела с помощью производной.

Если закон движения тела задан уравнением $S=S(t)$, то для нахождения мгновенной скорости тела, в какой –нибудь определенный момент времени надо:

- 1) найти производную $S'(t)$
- 2) подставить в полученную формулу заданное значение времени

Задача . Автомобиль приближается к мосту со скоростью 72 км/час. У моста висит дорожный знак «36 км /час». За 7 секунд до въезда на мост, водитель нажал на тормозную педаль. С разрешаемой ли скоростью автомобиль въехал на мост, если тормозной путь определяется формулой $S=20t-t^2$ (м)

Дано: $V=S'(t)=(20t-t^2)'= 20-2t$; $V= 20-2\cdot 7=6$ м/с ; $36\text{км/ч} = 10\text{м/с}$.

$$S=20t-t^2 \text{ (м)}$$

$$t=7\text{с}$$

$$V_1=72\text{км/час}=20\text{м/с}$$

$$V=?$$

Следовательно, автомобиль въехал на мост с разрешающей скоростью.

Задача. Тело массой 2кг движется прямолинейно по закону $x(t)= t^2-3t+2$, где t - время , с; x - координата м. Найдите кинетическую энергии тела через 10с после начала движения.

$$m=2$$

$$E_k = mv^2/2$$

$$x(t)= t^2-3t+2$$

$$V(t)=x'(t)= (t^2-3t+2)'=2t-3 \text{ м/с}$$

$$t=10$$

$$V(10)=2\cdot 10-3=17\text{м/с}$$

$$E_k=?$$

$$E_k=2\cdot 17^2/2=289\text{Дж}$$

Ответ: 289 Дж

Производная в электротехнике

В наших домах, на заводах, на транспорте - всюду используют электрический ток, причем в основном переменный ток

Под электрическим током понимают направленное упорядоченное движение свободных заряженных частиц.

Количественной характеристикой электрического тока является сила тока. Сила тока - есть производная заряда по времени $I = q'(t)$.

Задача. Заряд, протекающий через проводник, меняется по закону $q = \sin(2t-10)$ Кл. Найти силу тока в момент времени $t=5$ с.

$$\begin{aligned} q &= \sin(2t-10) \text{ Кл} & i(t) &= q'(t) = (\sin(2t-10))' = \cos(2t-10) \cdot (2t-10)' = 2 \cdot \cos(2t-10) \text{ А} \\ t &= 5 \text{ с} & i(t) &= 2 \cdot \cos(2 \cdot 5 - 10) = 2 \cdot \cos 0 = 2 \text{ А} \\ i(t) &=? \end{aligned}$$

Задача. Найти силу, действующую на материальную точку с массой 0,2 кг, движущуюся прямолинейно по закону $S(t) = 2t^3 - t^2$, при $t=2$ с.

$$\begin{aligned} S(t) &= 2t^3 - t^2 & F &= m \cdot a \\ T &= 2 \text{ с} & V &= S'(t) = (2t^3 - t^2)' = 6t^2 - 2t \\ m &= 0,2 \text{ кг} & a(t) &= V'(t) = (6t^2 - 2t)' = 12t - 2 \\ F &=? & a(2) &= 12 \cdot 2 - 2 = 22 \text{ м/с}^2 \\ & & F &= 0,2 \cdot 22 = 4,4 \text{ Н} \\ & & \text{Ответ:} & 4,4 \text{ Н} \end{aligned}$$

Применение геометрического смысла производной

Если функция возрастает на некотором промежутке, то ее производная во всех точках этого промежутка больше нуля.

Если функция убывает на некотором промежутке, то ее производная во всех точках этого промежутка меньше нуля.

Точки, в которых производная равна нулю, называют стационарными. Если в стационарной точке производная меняет знак с «+» на «-»

И это свойство касательных находит широкое применение.

Великий русский математик Пафнутий Львович Чебышев (годы жизни 1821-1894) писал, что особенную важность имеют те методы науки, которые позволяют решать задачу, общую для всей практической деятельности человека: как располагать своими средствами для достижения по возможности большей выгоды.

С такими задачами приходится иметь дело представителям самых разных специальностей-

- инженеры –технологи стремятся так организовать производство, чтобы выпускать как можно больше продукции;
- конструкторы стремятся разработать прибор для космического корабля так, чтобы масса прибора была наименьшей;
- экономисты стараются спланировать связи завода с источниками сырья так, чтобы транспортные расходы оказались наименьшими.

Математикам удалось разработать методы решения задач на нахождение наибольшего и наименьшего значения, или, как их еще называют, задач на оптимизацию с помощью производной (от латинского «оптимум - наилучший»)

Задача. Расход горючего легкового автомобиля (литров на 100 км) в зависимости от скорости X км/час при движении на четвертой передаче приблизительно описывается функцией $f(x) = 0,0017X^2 - 0,18X + 10,2$, $x > 30$ км/час. При какой скорости расход горючего будет наименьшим?

Решение: исследуем расход горючего с помощью производной

$$f'(x) = 0,0034x - 0,18$$

$$f'(x) = 0, \quad 0,0034x - 0,18 = 0; \quad X = 53$$

Находим знаки производной

Следовательно, расход горючего при скорости $X = 53$ км/час будет наименьшим: $f(53) = 5,43$ л.

Мы с вами сейчас говорили об истории развития производной, рассмотрели задачи на применение производной. И какой мы сделаем вывод? Подтвердили мы гипотезу или нет?

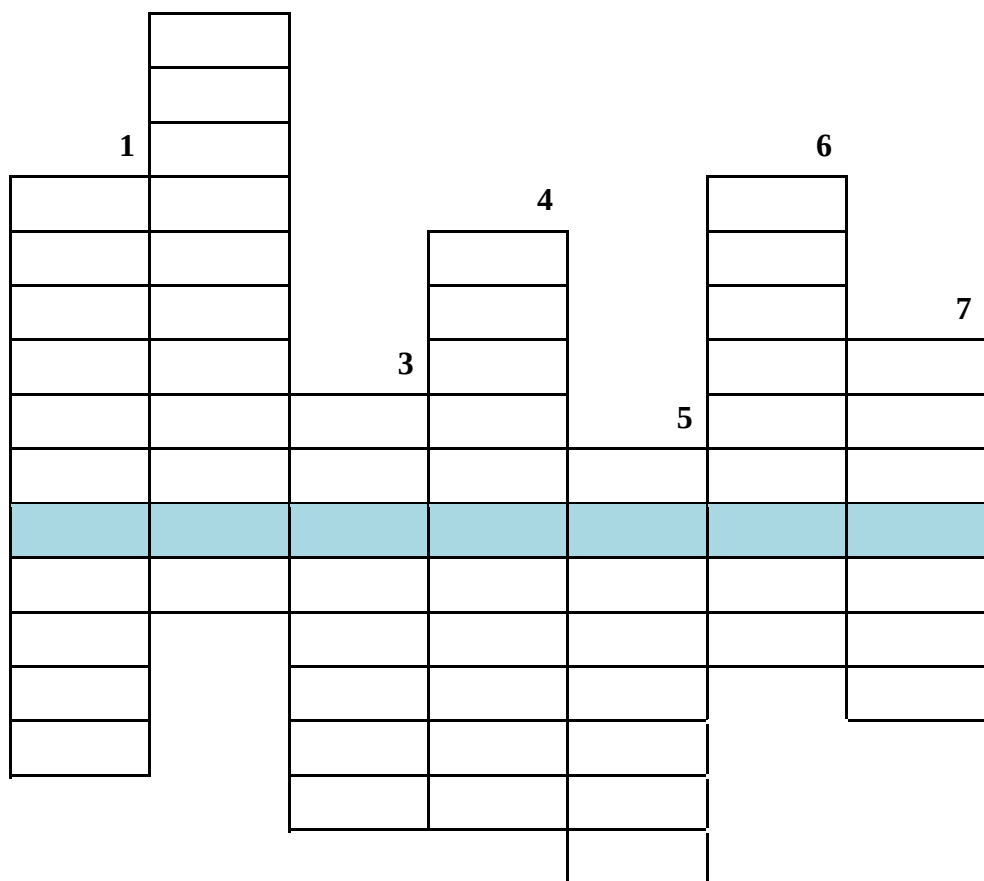
Производная функции используется всюду, где есть неравномерное протекание процесса: и неравномерное механическое движение, это и переменный ток, и мощность, и нахождение наименьшего и наибольшего значения и многое другое.

В частности, успехи в учебе – производная роста знаний.

Домашнее задание: решить кроссворд

- 1. Французский математик XVII века Пьер Ферма определяет эту линию так: «Прямая,

2



наиболее тесно примыкающая к кривой в малой окрестности заданной точки»

- 2. В математике это понятие возникло в результате попыток придать точный смысл таким понятиям как «скорость движения в данный момент времени» и «касательной к кривой в заданной точке»

- 3. Приращение какой переменной обычно обозначают Δx ?

- 4. Если существует предел в точке a и этот предел равен значению функции в точке a , то в этой точке функции называют...

- 5. Эта точка лежит внутри области определения функции, и в ней функция принимает самое большое

значение по сравнению со значениями в близких точках

- 6. Эта величина определяется как производная скорости по времени
- 7. Если функцию $y = f(x)$ можно представить в виде $y = f(x) = g(h(x))$, где $y = g(t)$ и $t = h(x)$ – некие функции, то функцию f называют...

Выполнить задание, сделать фото и отправить мне на почту: (demina.aminet@mail.ru)

Не забудьте указать свою фамилию и номер группы