Тема: « Числовая последовательность и способы её задания».

Цель урока: учащиеся должны знать, что такое числовая последовательность; способы задания числовой последовательности; уметь различать различные способы задания числовых последовательностей.

Определение 1. Функцию $y = f(x)$, $x \in N$ называют функцией натурального аргумента или числовой последовательностью и обозначают: $y = f(n)$ или $y_1, y_2, y_3, ..., y_n, ...$ или (y_n).
В данном случае независимая переменная – натуральное число.

Чаще всего последовательности будем обозначать так: (a_n), (b_n), (c_n) и т.д.

Определение 2. **Члены последовательности**.

Элементы, образующие последовательность, называются членами последовательности.

Новые понятия: предыдущий и последующий член последовательности,

a_1 ...a_n. *(1-ый и n-ый член последовательности)*

<u>Способы задания числовой последовательности.</u>

I. *<u>Аналитический способ.</u>*

Любой n-й элемент последовательности можно определить с помощью формулы.(демонстрационный материал)

Разобрать примеры

Пример 1. Последовательность чётных чисел: $y = 2n$.
Пример 2. Последовательность квадрата натуральных чисел: $y = n^2$;
$1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2, ...$.
Пример 3. Стационарная последовательность: $y = C$;
$C, C, C, ...,C, ...$.
Частный случай: $y = 5$; $5, 5, 5, ..., 5, ...$.
Пример 4. Последовательность $y = 2^n$;
$2, 2^2, 2^3, 2^4, ..., 2^n, ...$.

II. *<u>Словесный способ.</u>*

Правила задания последовательности описываются словами, без указания формул или когда закономерности между элементами последовательности нет.
Пример 1. Приближения числа ***π.***
Пример 2. Последовательность простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...
Пример 3. Последовательность чисел делящихся на 5.
Пример 2. Произвольный набор чисел: 1, 4, 12, 25, 26, 33, 39, ...
Пример 3. Последовательность чётных чисел 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ...

III. *<u>Рекуррентный способ.</u>*

Рекуррентный способ заключается в том, что указывается правило, позволяющее вычислить n-й член последовательности, если указаны ее несколько первых членов (как минимум один первый член) и формула, позволяющая по предыдущим членам вычислить ее следующий член. Термин ***рекуррентный*** произошло от латинского слова ***recurrere***, что означает ***возвращаться***. При вычислении членов последовательности по этому правилу мы как бы все время возвращаемся назад, вычисляя следующий член на основе предыдущего. Особенностью этого способа является то, что для определения, например, 100-го члена последовательности необходимо сначала определить все предыдущие 99 членов.

Пример 1. $a_1=a$, $a_{n+1}=a_n+0{,}7$. Пусть $a_1=5$, тогда последовательность будет иметь вид: 5; 5,7; 6,4; 7,1; 7,8; 8,5; ... .
Пример 2. $b_1=b$, $b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$. Пусть $b_1=23$, тогда последовательность будет иметь вид: 23; 11,5; 5,75; 2,875; ... .
Пример 3. Последовательность Фибоначчи. Эта последовательность легко задаётся рекуррентно: $y_1=1$, $y_2=1$,$y_{n-2}+y_{n-1}$, если n=3, 4, 5, 6, ... Она будет иметь вид:
1, 1,2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... (*n*-ый член этой последовательности равен сумме двух предыдущих членов)
Аналитически последовательность Фибоначчи задать трудно, но возможно. Формула, по которой определяется любой элемент этой последовательности, выглядит так:

$$y=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Дополнительная информация:

Итальянский купец Леонардо из Пизы (1180-1240), более известный под прозвищем Фибоначчи был значительным математиком средневековья. С помощью данной последовательности Фибоначчи определил число **φ** (фи); φ=1,618033989.

IV. *Графический способ*

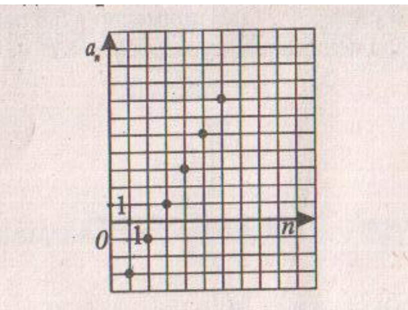


Рис. 5.

Члены последовательности можно изображать точками на координатной плоскости. Для этого по горизонтальной оси откладывают номер, а по вертикальной – значение соответствующего члена последовательности.
Для закрепления способов задания прошу привести несколько примеров последовательностей, которые задаются или словесным, или аналитическим, или рекуррентным способом.

Виды числовых последовательностей

1) Возрастающая – если каждый член меньше следующего за ним, т.е. $a_n < a_{n+1}$.

2) Убывающая – если каждый член больше следующего за ним, т.е. $a_n > a_{n+1}$.

3) Бесконечная.

4) Конечная.

5) Знакочередующаяся.

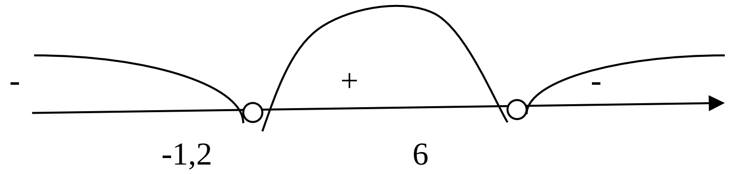
6) Постоянная (стационарная).

Возрастающую или убывающую последовательность называют монотонными.

1) 3; 6; 9; 12; 15; 18;…
2) 5, 3, 1, -1.
3) –1; 2; –3; 4; –5; …
4) *1, 4, 9, 16,…*
5) –1; 2; –3; 4; –5; 6; …
6) 3; 3; 3; 3; …; 3; … .

Закрепление нового материала. Решение задач.
Пример 1. Составить возможную формулу n-го элемента последовательности (y_n):

а) 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...;
б) 4, 8, 12, 16, 20, ...;
Решение.
а) Это последовательность нечётных чисел. Аналитически эту последовательность можно задать формулой $y = 2n+1$.
б) Это числовая последовательность, у которой последующий элемент больше предыдущего на 4. Аналитически эту последовательность можно задать формулой $y = 4n$.
Пример 2. Выписать первые десять элементов последовательности, заданной рекуррентно: $y_1=1$, $y_2=2$, $y_n = y_{n-2}+y_{n-1}$, если $n = 3, 4, 5, 6, \dots$.
Решение.
Каждый последующий элемент этой последовательности равен сумме двух предыдущих элементов.
$y_1=1$;
$y_2=2$;
$y_3=1+2=3$;
$y_4=2+3=5$;
$y_5=3+5=8$;
$y_6=5+8=13$;
$y_7=8+13=21$;
$y_8=13+21=34$;
$y_9=21+34=55$;
$y_{10}=34+55=89$.
Пример 3. Последовательность (y_n) задана рекуррентно: $y_1=1$, $y_2=2$,$y_n=5y_{n-1}- 6y_{n-2}$. Задать эту последовательность аналитически.
Решение.
Найдём несколько первых элементов последовательности.
$y_1=1$;
$y_2=2$;
$y_3=5y_2-6y_1=10-6=4$;
$y_4=5y_3-6y_2=20-12=8$;
$y_5=5y_4-6y_3=40-24=16$;
$y_6=5y_5-6y_4=80-48=32$;
$y_7=5y_6-6y_5=160-96=64$.
Получаем последовательность: 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; ..., которую можно представить в виде
2^0; 2^1; 2^2 ; 2^3 ; 2^4 ; 2^5 ; 2^6 ... .
n = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7... .
Анализируя последовательность, получаем следующую закономерность: $y = 2^{n-1}$.
Пример 4. Дана последовательность $y_n=24n+36-5n^2$.
а) Сколько в ней положительных членов?
б) Найти наибольший элемент последовательности.
в) Есть в данной последовательности наименьший элемент?
Решение.
Данная числовая последовательность – это функция вида $y = -5x^2 +24x+36$, где $x \epsilon N$.
а) Найдём значения функции, при которых $-5x^2 +24x+36>0$. Решим уравнение $-5x^2 +24x+36=0$.
$D = b^2-4ac=1296$, $\sqrt{D} = 36$,$X_1=6$, $X_2=-1,2$.
Уравнение оси симметрии параболы $y = -5x^2 +24x+36$ можно найти по формуле $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, получим: $x=2,4$.



Неравенство $-5x^2+24x+36>0$ выполняется при $-1,2< x < 6$. В этом интервале находится пять натуральных чисел (1, 2, 3, 4, 5). Значит в заданной последовательности пять положительных элементов последовательности.
б) Наибольший элемент последовательности определяется методом подбора и он равен $y_2=64$.
в) Наименьшего элемента нет.

Задания для самостоятельной работы по теме:

1. Напишите первые пять членов последовательности, членами которой являются натуральные числа, кратные числу 15.
2. Последовательность задана формулой $x_n=3n^2+1$. Найдите: а) x_1; б) x_5; в) x_m; г) x_{3m}.
3. Определите номер члена последовательности, заданной формулой $a_n=41-2n$, равного 19.
4. Последовательность задана рекуррентным способом: $y_1=-3$, $y_{n+1}=2y_n+5$. Найдите первые три члена последовательности.
5. Напишите формулу общего члена последовательности, членами которой являются натуральные числа, при делении которых на 7 в остатке остается 1.
6. Составить конспект урока.