Тема: « Приращение аргумента, приращение функции». Понятие производной

Повторение

Пример:

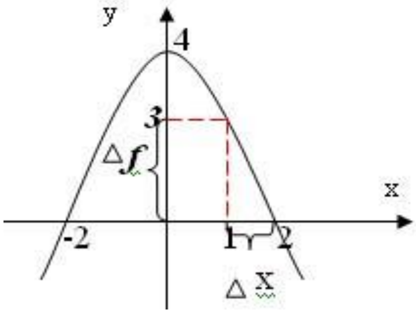
Найти значение функции $f(x) = x^2 + 2x$ в точке $x_0 = -3$.

Решение: $f(x_0) = f(-3) = (-3)^2 + 2\cdot(-3) = 9 - 6 = 3$

Ответ: $f(-3) = 3$

2. Изучение нового материала:

1) Часто нас интересует не значение какой-либо величины, а ее **изменение.** Например: как быстро изменяется температура, как быстро дорожают цены на билеты и так далее…



Давайте рассмотрим с Вами основные понятия, которые относятся к приращению функции.

Например: Дан график функции $y = 4 - x^2$

По графику найти значение функции в точке $x_1 = 1$ и

$x_2 = 2$.

Разность $x_2 - x_1 = 2 - 1 = 1$; $\Delta x = 1$

$f(1) = 3$; $f(2) = 0$; $f(2) - f(1) = 0 - 3 = -3$

$\Delta f = -3$

2). В приведенном примере мы не только вычислили значения функции $f(x)$ в некоторых точках, но и оценили изменения Δf этой функции при заданных изменениях аргумента Δx.

При сравнении значений функции f в некоторой фиксированной точке x_0 со значениями этой функции в различных точках x, лежащих в окрестности x_0, удобно выражать разность $f(x) - f(x_0)$ через разность $x - x_0$, пользуясь понятиями "приращение функции" и "приращение аргумента".

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Пусть x – произвольная точка, лежащая в некоторой окрестности фиксированной точки x_0. Разность $x - x_0$ называется приращением независимой переменной (или приращением аргумента) в точке x_0 и обозначается $\mathbf{\Delta x}$. Таким образом, $\Delta x = x - x_0$, откуда следует, что $x = x_0 + \Delta x$.

Говорят также, что первоначальное значение аргумента x_0 получило приращение Δx. Вследствие этого значение функции f изменится на величину $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Эта разность называется **приращением функции** f в точке x_0, соответствующим приращению Δx, и обозначается Δf, т. е. по определению

$\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$, откуда $f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + \Delta f$.

Обратите внимание: при фиксированном значении x_0 приращение Δf есть функция от Δx.

Определение.

Приращением аргумента функции называется величина, равная разности между конечным и начальным значением аргумента: $\Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}$

- Определение.

Приращением функции называется величина, равная разности между конечным и начальным значением функции $\Delta \boldsymbol{f} = \boldsymbol{f(x) - f(x_0) = f(x_0 + x) - f(x_0)}$.

Пример 1. Найти приращение функции $y=x^3$ при переходе от $x_0=1{,}2$ к точке $x=2{,}5$

Решение: $\Delta x=2{,}5-1{,}2=1{,}3$, $\Delta f=2{,}5^2-1{,}2^2=6{,}25-1{,}44= 4{,}81$
Ответ: 1,3; 4,81

Пример 2. Найти приращение аргумента и приращение функции в точке x_0, если $f(x)= x^2$, если $x_0= 2$, $x=1{,}9$.

Решение: $\Delta x=1{,}9-2=-0{,}1$, $\Delta f=1{,}9^2-2^2=3{,}61-4= -0{,}39$
Ответ: -0,1; -0,39

Вывод: Приращение функции может быть как положительным так и отрицательным.

Теперь выясним геометрический смысл приращения аргумента, приращения функции.

Рассмотрим график функции $y = f(x)$. Прямую l, проходящую через любые две точки графика функции f, называют **касательной** к графику f. Уравнение прямой на плоскости имеет вид $y = kx + b$. Угловой коэффициент k секущей, проходящей через точки (x_0; $f(x_0)$) и (x; $f(x)$), равен tgα. ΔABC – прямоугольный.

$\text{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}$ или $k = \text{tg}\alpha = \frac{\Delta f}{\Delta x}$

Пример 3. **Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, проходящей через точки с данными абсциссами x_1 и x_2. Какой угол (острый или тупой) образует секущая с осью Ox, если $f(x) = \frac{1}{2}x^2$; $x_1 = 0$; $x_2 = 1$**

Решение: $\text{tg}\alpha = \frac{\Delta f}{\Delta x}$;

$\Delta x = x - x_0$; $\Delta f = f(x) - f(x_0)$;

$\Delta x = 1 - 0 = 1$; $\Delta f = f(1) - f(0) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 = \frac{1}{2}$

$k = \text{tg}\alpha = \frac{1}{2} > 0$, значит α – острый

Ответ: tgα = $\frac{1}{2}$; α - острый

5) Итак, мы выяснили что такое приращение аргумента и приращение функции и в чём состоит их геометрический смысл. Теперь мы научимся применять данные определения при решении задач.

3.Закрепление изученного материала

а) Найти приращение функции f в точке x_0, если

$f(x) = 3x+1$ $x_0 = 5$ $\Delta x = 0,01$.

Решение: $x=x_0+\Delta x$, $x= 5+0,01=5,01$

$f(x_0)=f(5)=3\cdot5+1=16$; $f(x)=f(5,01)= 3\cdot5,01+1=16,03$

$\Delta f = f(x) - f(x_0)$; $\Delta f = 16,03-16=0,03$ Ответ: 0,03

. Задачи, приводящие к понятию производной.
Задача о скорости движения.
Рассмотрим прямолинейное движение некоторого тела. Закон движения задан формулой S = S(t), т.е. каждому моменту времени t соответствует определённое значение пройденного пути S. Найти скорость движения тела в момент времени t.
Решение: Пусть в момент времени t тело находится в точке M.
Дадим аргументу t приращение Δt, за это время тело переместится в некоторую точку P, т.е. пройдёт путь ΔS.
Итак, за время Δt тело прошло путь ΔS.
Что можно найти, зная эти два значения?
$v_{\text{ср.}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$, т.е. среднюю скорость движения тела за промежуток времени $[t; t+\Delta t]$.

<u>*Определение:*</u> *Средней скоростью движения тела* называется отношение пройденного пути ко времени, в течение которого этот путь пройден.
В физике часто идёт речь о скорости v(t), т.е. скорости в определённый момент времени t, часто её называют *мгновенной скоростью.*
Можно рассуждать так: мгновенную скорость получим если Δt → 0, т.е. Δt выбирается всё меньше и меньше, т.е. $v_{\text{мгнов.}} = \lim_{\Delta t\to 0} v_{\text{ср.}} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}$.

Мгновенная скорость

$$v_{\text{мгнов.}} = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср.}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Можно указать ещё много задач из физики, геометрии, для решения которых необходимо отыскать скорость изменения соответствующей функции.

Например, отыскание угловой скорости вращающегося тела, отыскание теплоёмкости тела при нагревании, линейный коэффициент расширения тел при нагревании, скорость химической реакции в данный момент времени и т.п.

Все эти задачи требуют для своего решения нахождения скорости изменения соответствующей функции.

Ввиду обилия задач, приводящих к вычислению скорости изменения функции или, иначе, к вычислению предела отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, оказалось необходимым выделить такой предел для произвольной функции и изучить его основные свойства.

Этот предел называется производной функции.

II. Определение производной.

Определение: *Производной функции y = f(x) в данной точке x_0 называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.*

Обозначение производной: $y'(x_0)$ или $f'(x_0)$. Тогда $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ или $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$

Если внимательно проанализировать определение производной, то мы обнаружим, что в нём заложен алгоритм её нахождения.

Алгоритм нахождения производной (по определению)

1. Рассмотрим два значения аргумента x и Δx, где Δx – приращение аргумента.
2. Найдём приращение функции $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$.
3. Найдём отношение приращения функции к приращению аргумента $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.
4. Вычислим предел этого отношения при $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) \quad \text{или} \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

С помощью этого алгоритма можно найти производную любой функции, т.е. получить таблицу производных, а также доказать правила вычисления производных, которыми в дальнейшем мы и будем пользоваться.

4.

Пример 1.

Найти производную функции у = С.

Решение: f(x) = C.

1.Возьмём два значения аргумента х и х + Δх.

2.$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = C - C = 0.$

3.$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0.$

4.$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0.$

Значит, $(C)'$ = 0 или производная постоянной равна нулю.

Пример 2.

Найти производную функции у = х.

Решение: f(x) = x.

1.Возьмём два значения аргумента х и х + Δх.

2.$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x = \Delta x.$

3.$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$

4.$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 1 = 1.$

Значит, $(x)'$ = 1.

Пример 3.

Найти производную функции у = x^2.

Решение: f(x) = x^2.

1.Возьмём два значения аргумента х и х + Δх.

2.$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = \Delta x(2x + \Delta x).$

3.$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$

4.$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 2x + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = 2x.$

Значит, $(x^2)'$ = 2x.

Пример 4.

Найти производную функции у =$kx + m$.

Решение: f(x) = $kx + m$.

1.Возьмём два значения аргумента х и х + Δх.

2.$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = k(x+\Delta x) + m - kx - m = kx + k\Delta x - kx = k\Delta x.$

3.$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k.$

4.$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k = k.$

Значит, $(kx + m)'$ = k.

Задание:

1. **для закрепления знаний предлагаю изучить видеоматериал**

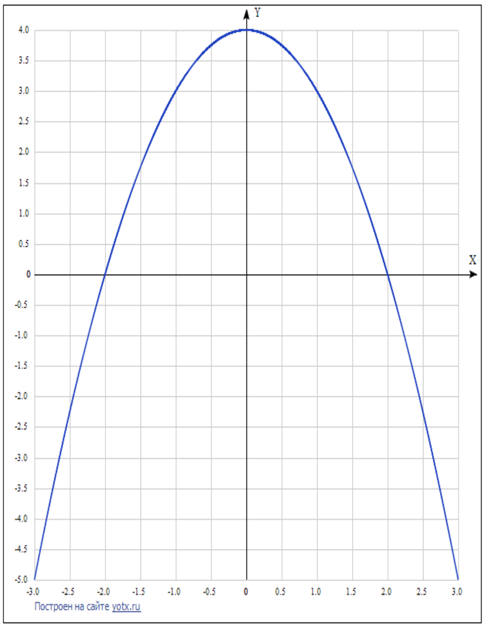
https://youtu.be/QygmvlwtyXQ

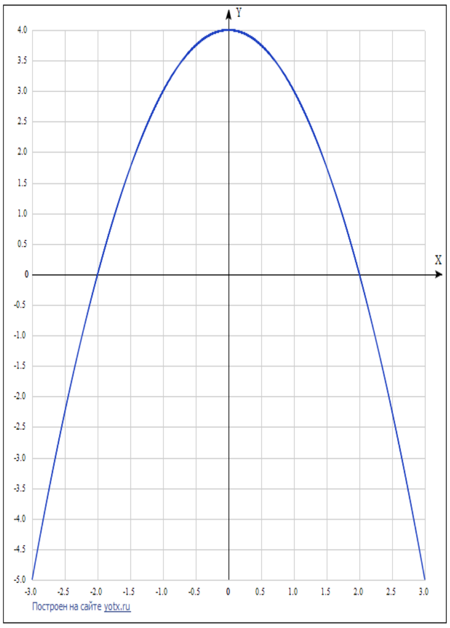
изучить материал предлагаемый на электронной платформе в курсе **Математика**

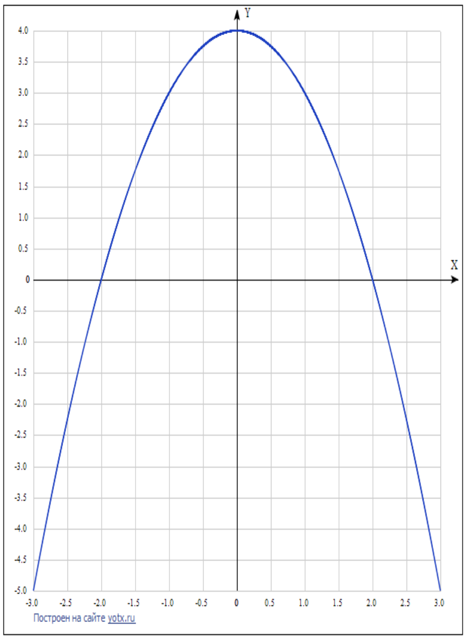
глава 9 Начала математического анализа

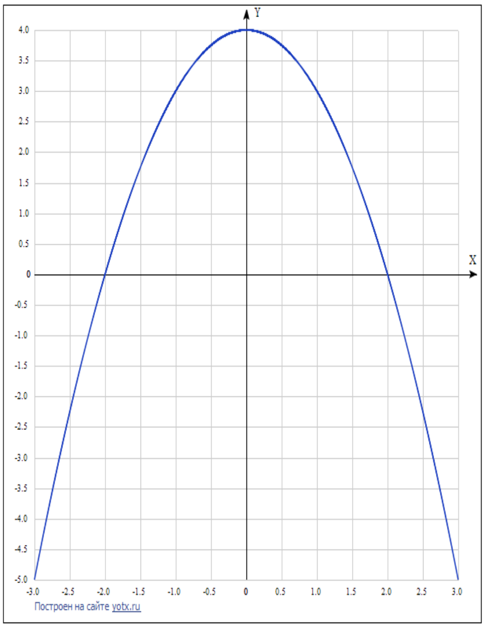
Занятие 2. Понятие производной

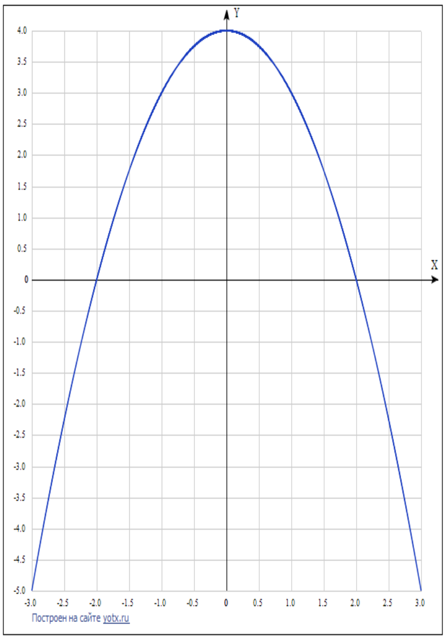
и решить **Задания. Понятие производной**

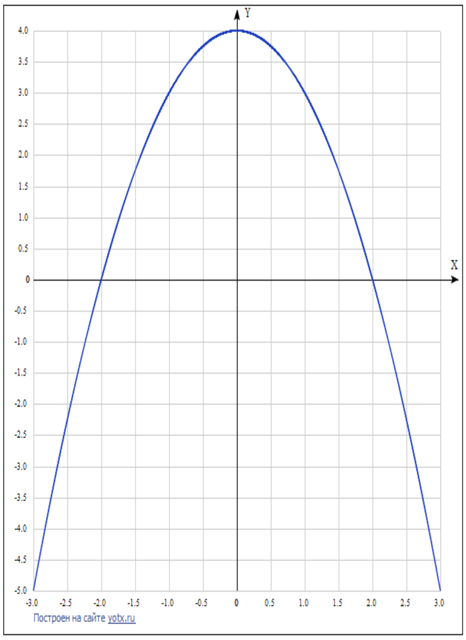

Y
X
4.0 3.5 3.0 2.5 2.0 1.5 1.0 0.5 0 -0.5 -1.0 -1.5 -2.0 -2.5 -3.0 -3.5 -4.0 -4.5 -5.0
-3.0 -2.5 -2.0 -1.5 -1.0 -0.5 0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0
Построен на сайте yotx.ru

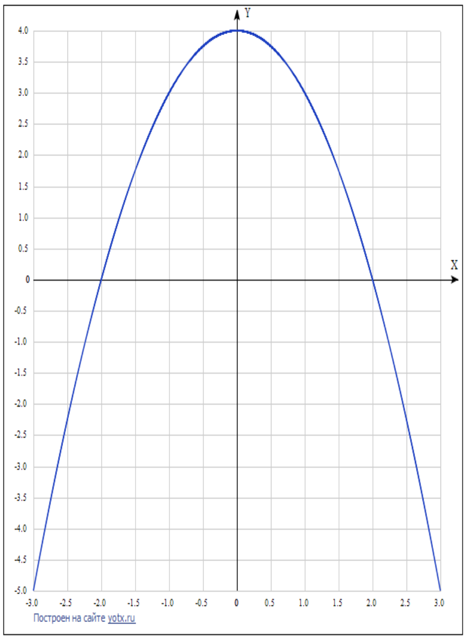

Y
X
4.0 3.5 3.0 2.5 2.0 1.5 1.0 0.5 0 -0.5 -1.0 -1.5 -2.0 -2.5 -3.0 -3.5 -4.0 -4.5 -5.0
-3.0 -2.5 -2.0 -1.5 -1.0 -0.5 0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0
Построен на сайте yotx.ru

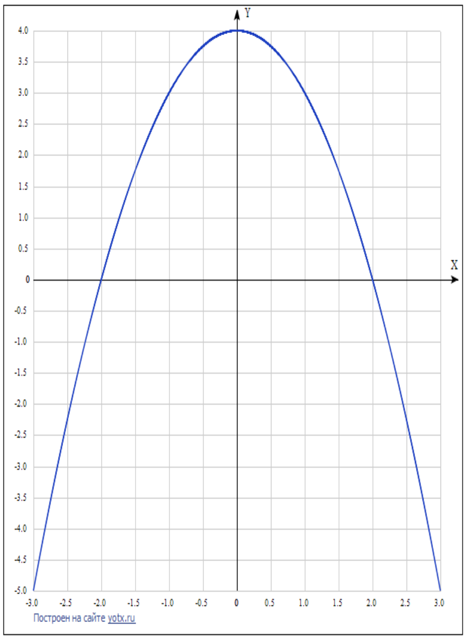

Y
X
4.0 3.5 3.0 2.5 2.0 1.5 1.0 0.5 0 -0.5 -1.0 -1.5 -2.0 -2.5 -3.0 -3.5 -4.0 -4.5 -5.0
-3.0 -2.5 -2.0 -1.5 -1.0 -0.5 0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0
Построен на сайте yotx.ru

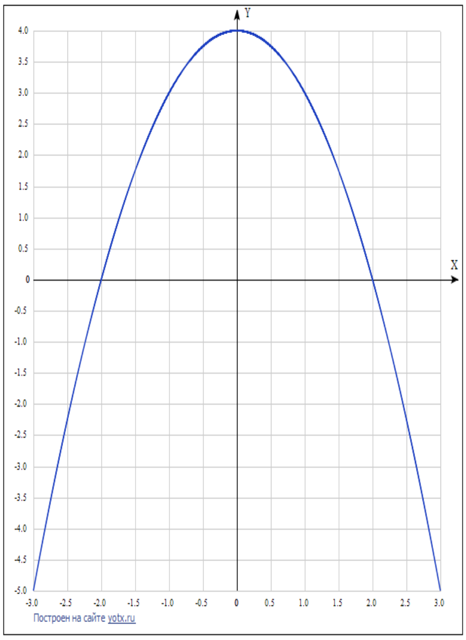

Y
X
4.0 3.5 3.0 2.5 2.0 1.5 1.0 0.5 0 -0.5 -1.0 -1.5 -2.0 -2.5 -3.0 -3.5 -4.0 -4.5 -5.0
-3.0 -2.5 -2.0 -1.5 -1.0 -0.5 0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0
Построен на сайте yotx.ru

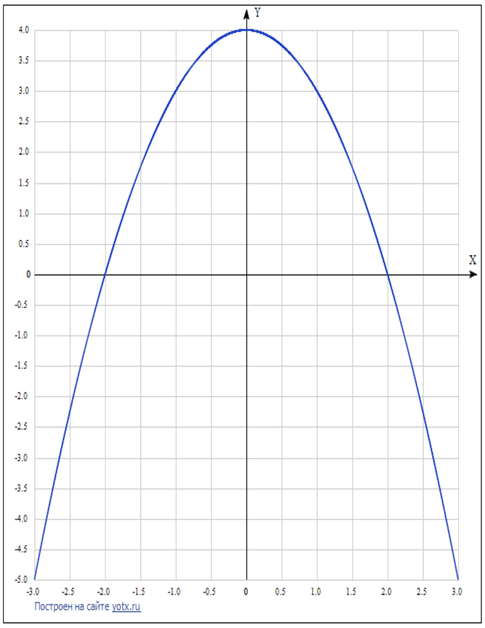

Y
X
4.0 3.5 3.0 2.5 2.0 1.5 1.0 0.5 0 -0.5 -1.0 -1.5 -2.0 -2.5 -3.0 -3.5 -4.0 -4.5 -5.0
-3.0 -2.5 -2.0 -1.5 -1.0 -0.5 0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0
Построен на сайте yotx.ru

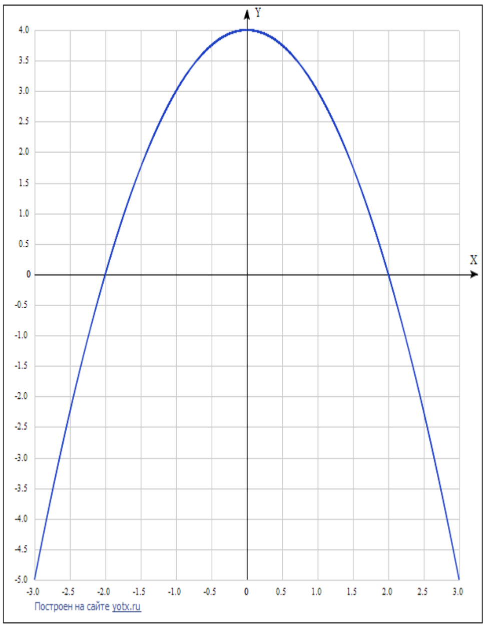

Y
X
4.0 3.5 3.0 2.5 2.0 1.5 1.0 0.5 0 -0.5 -1.0 -1.5 -2.0 -2.5 -3.0 -3.5 -4.0 -4.5 -5.0
-3.0 -2.5 -2.0 -1.5 -1.0 -0.5 0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0
Построен на сайте yotx.ru

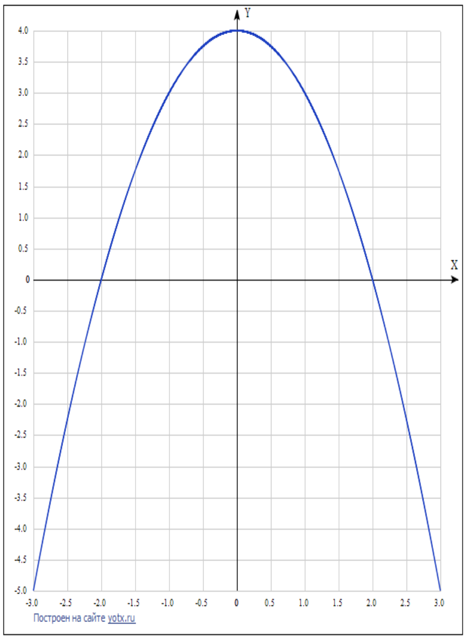

Y
X
4.0 3.5 3.0 2.5 2.0 1.5 1.0 0.5 0 -0.5 -1.0 -1.5 -2.0 -2.5 -3.0 -3.5 -4.0 -4.5 -5.0
-3.0 -2.5 -2.0 -1.5 -1.0 -0.5 0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0
Построен на сайте yotx.ru

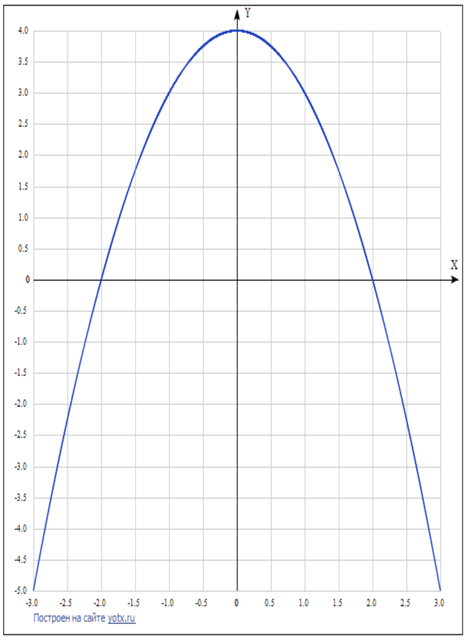

Y
X
4.0 3.5 3.0 2.5 2.0 1.5 1.0 0.5 0 -0.5 -1.0 -1.5 -2.0 -2.5 -3.0 -3.5 -4.0 -4.5 -5.0
-3.0 -2.5 -2.0 -1.5 -1.0 -0.5 0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0
Построен на сайте yotx.ru

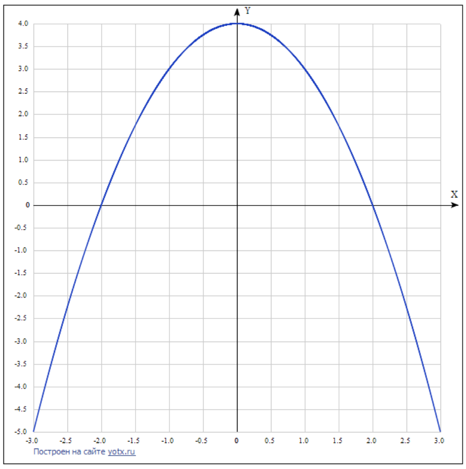

Y
X
4.0 3.5 3.0 2.5 2.0 1.5 1.0 0.5 0 -0.5 -1.0 -1.5 -2.0 -2.5 -3.0 -3.5 -4.0 -4.5 -5.0
-3.0 -2.5 -2.0 -1.5 -1.0 -0.5 0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0
Построен на сайте yotx.ru

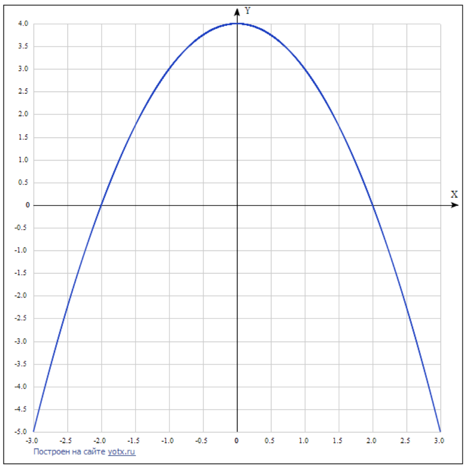

Y
X
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
-0.5
-1.0
-1.5
-2.0
-2.5
-3.0
-3.5
-4.0
-4.5
-5.0
-3.0 -2.5 -2.0 -1.5 -1.0 -0.5 0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0
Построен на сайте yotx.ru

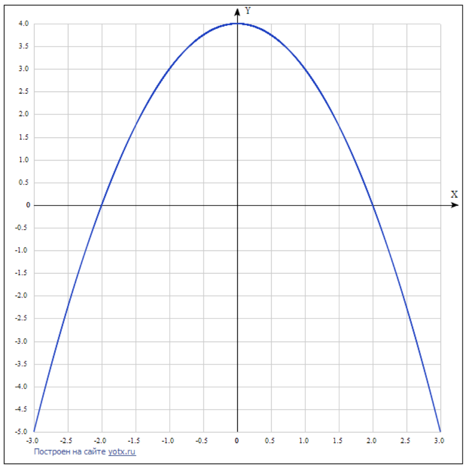

Y
X
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
-0.5
-1.0
-1.5
-2.0
-2.5
-3.0
-3.5
-4.0
-4.5
-5.0
-3.0 -2.5 -2.0 -1.5 -1.0 -0.5 0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0
Построен на сайте yotx.ru

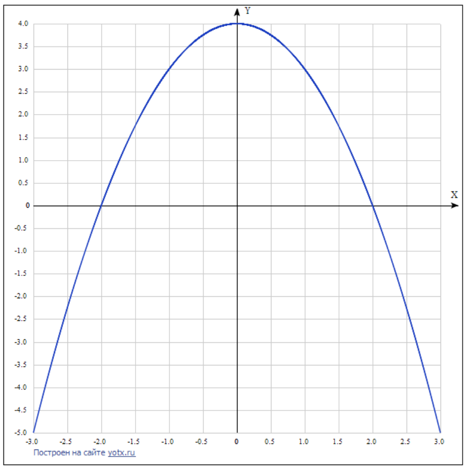

Y
X
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
-0.5
-1.0
-1.5
-2.0
-2.5
-3.0
-3.5
-4.0
-4.5
-5.0
-3.0 -2.5 -2.0 -1.5 -1.0 -0.5 0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0
Построен на сайте yotx.ru

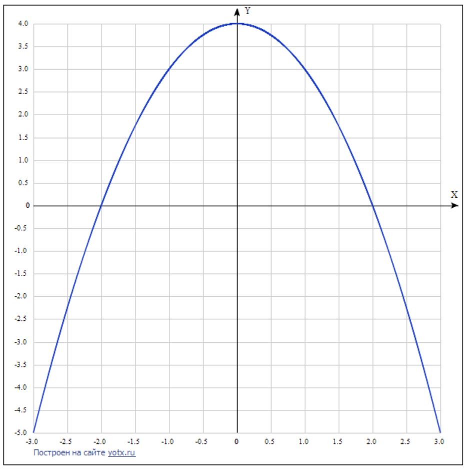

Y
X
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
-0.5
-1.0
-1.5
-2.0
-2.5
-3.0
-3.5
-4.0
-4.5
-5.0
-3.0 -2.5 -2.0 -1.5 -1.0 -0.5 0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0
Построен на сайте yotx.ru

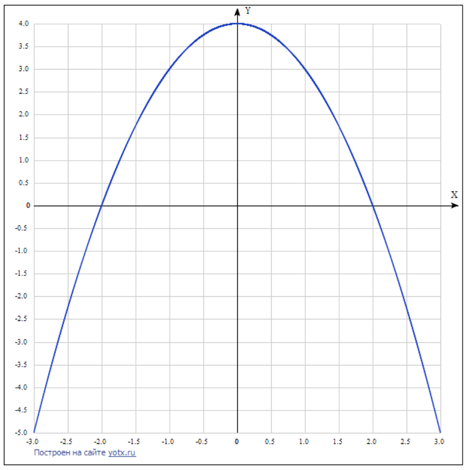

Y
X
4.0 3.5 3.0 2.5 2.0 1.5 1.0 0.5 0 -0.5 -1.0 -1.5 -2.0 -2.5 -3.0 -3.5 -4.0 -4.5 -5.0
-3.0 -2.5 -2.0 -1.5 -1.0 -0.5 0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0
Построен на сайте yotx.ru


Y
X
4.0 3.5 3.0 2.5 2.0 1.5 1.0 0.5 0 -0.5 -1.0 -1.5 -2.0 -2.5 -3.0 -3.5 -4.0 -4.5 -5.0
-3.0 -2.5 -2.0 -1.5 -1.0 -0.5 0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0
Построен на сайте yotx.ru


Y
X
4.0 3.5 3.0 2.5 2.0 1.5 1.0 0.5 0 -0.5 -1.0 -1.5 -2.0 -2.5 -3.0 -3.5 -4.0 -4.5 -5.0
-3.0 -2.5 -2.0 -1.5 -1.0 -0.5 0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0
Построен на сайте yotx.ru


Y
X
4.0 3.5 3.0 2.5 2.0 1.5 1.0 0.5 0 -0.5 -1.0 -1.5 -2.0 -2.5 -3.0 -3.5 -4.0 -4.5 -5.0
-3.0 -2.5 -2.0 -1.5 -1.0 -0.5 0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0
Построен на сайте yotx.ru


Y
X
4.0 3.5 3.0 2.5 2.0 1.5 1.0 0.5 0 -0.5 -1.0 -1.5 -2.0 -2.5 -3.0 -3.5 -4.0 -4.5 -5.0
-3.0 -2.5 -2.0 -1.5 -1.0 -0.5 0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0
Построен на сайте yotx.ru


Y
X
4.0 3.5 3.0 2.5 2.0 1.5 1.0 0.5 0 -0.5 -1.0 -1.5 -2.0 -2.5 -3.0 -3.5 -4.0 -4.5 -5.0
-3.0 -2.5 -2.0 -1.5 -1.0 -0.5 0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0
Построен на сайте yotx.ru